BIBLIOTECA DI SCIENZE FISICHE MATEMATICHE E NATURALI

CONTARDO BAFFI

GEOMETRIA PRATICA

AD USO DEI GINNASI INFERIORI E DEL PRIMO BIENNIO DEGLI ISTITUTI TECNICI E MAGISTRALI INFERIORI

G. B. PARAVIA & C.

Prof. Dott. CONTARDO BAFFI

Ordinario di Matematica e Fisica nel R. Istituto Magistrale Carlo Tenca di Milano

GEOMETRIA PRATICA

ad uso

DEI GINNASI INFERIORI

e del PRIMO BIENNIO

DEGLI ISTITUTI TECNICI E MAGISTRALI INFERIORI

Secondo i recenti programmi del R. Decreto 29 giugno 1933-XI - n. 892

G. B. PARAVIA & C.

TORINO - MILANO - FIRENZE - ROMA - NAPOLI - PALERMO

PREFAZIONE

Nel presente volumetto ho svolto le nozioni di geometria pratica *prescritte dai recenti programmi ministeriali, emanati con R. Decreto 29 Giugno 1933, n. 892, per i Ginnasi inferiori. Nello svolgimento della materia ho tenuto presente che* l'insegnamento della geometria deve essere a base sperimentale ed avere principalmente lo scopo di mantenere vivo il ricordo delle nozioni geometriche apprese alle scuole elementari, fissar bene la nomenclatura, che in alcune sue parti occorre possedere con sicurezza, per studiare poi, con profitto, la geometria astronomica, e fornire, con le regole di misura, abbondante materia di esercizi e ottime occasioni per l'introduzione di formule letterali, e la deduzione di una di esse, da altre. Gli esercizi proposti servono anche a preparare l'alunno gradatamente, e quasi senza che egli se ne accorga, al metodo deduttivo; a tal fine l'insegnante deve abituare l'alunno a dedurre dalla nozione intuitiva e sperimentale di talune proprietà delle figure, altre proprietà, delle quali l'esperimento non valga più come strumento di ricerca, ma, se mai, come mezzo di controllo.

Nell'Istituto Tecnico e Magistrale inferiore, dicono le avvertenze ministeriali, lo sviluppo della geometria deve avere carattere razionale, ma questo carattere deve affermarsi soltanto gradualmente: in principio l'insegnamento della geometria deve essere quasi esclusivamente intuitivo. L'insegnante è tenuto anche a svolgere esercizi riguardanti le regole di misura per le lunghezze, le superficie e i volumi apprese nelle scuole elementari. *È quindi logicamente evidente che l'insegnamento della geometria razionale deve, in questi Istituti, avere inizio nella terza classe, come nel Ginnasio*

ha inizio nella quarta classe, e nel primo biennio si debbono impartire nozioni pratiche di geometria, secondo le prescrizioni delle avvertenze ministeriali.

Tenuto presente i criteri a cui deve informarsi l'insegnante nei corsi inferiori, ho svolto la geometria piana e solida, ricorrendo a espedienti pratici e intuitivi per rendere i concetti chiari e assimilabili, usando sempre una forma piana e facile adatta all'intelligenza dei giovanetti che frequentano tanto il ginnasio inferiore quanto il primo biennio degli Istituti Tecnici e Magistrali inferiori. Alla fine di ogni capitolo ho fatto seguire una numerosa serie di esercizi pratici e graduati, riassumenti, nei primi capitoli, la materia svolta, e nella misura delle figure piane e solide ho assegnato facili problemi inversi *per i quali è necessaria l'applicazione della estrazione di radice quadrata.*

Credo di avere interpretato fedelmente i criteri delle avvertenze ministeriali e sarò grato ai colleghi che vorranno essermi cortesi di giudizi e consigli che terrò nel massimo conto in una prossima edizione.

Contardo Baffi

Milano, Ottobre 1934-XII.

CAPITOLO I.

PRELIMINARI.

1. Se osserviamo un *corpo* qualunque, per esempio, un *dado*, una *palla da bigliardo*, ecc., notiamo in esso la **forma**, l'**estensione**, cioè *la parte di spazio che occupa*, il *colore*, la *materia*, il *peso*, ecc., che si dicono *proprietà* del corpo.

2. Se in un corpo consideriamo solamente la **forma** e l'**estensione**, e facciamo astrazione di tutte le altre proprietà, veniamo a concepire il **corpo**, o **solido geometrico**.

La scienza che studia la **forma** *e l'***estensione** *dei corpi si dice* **geometria**.

3. Gli elementi fondamentali della geometria sono il **punto**, la **linea** e la **superficie**.

Il **punto geometrico**, o semplicemente il **punto**, *è un corpo piccolissimo, privo di materia e di estensione.*

L'idea del punto ci è data dal *segno lasciato da una matita, bene* **appuntata**, *su un foglio di carta, da un granellino finissino di sabbia*, ecc. Per indicare i punti si usano le lettere dell'alfabeto maiuscolo A, B, C, scrivendole accanto ai segni che li rappresentano.

. A

. C

. B

Fig. 1

Così avremo (fig. 1) il *punto* A, il *punto* B, il *punto* C, ecc.

4. *L'idea della* **linea** ci è data dalla traccia lasciata dalla punta di una matita che scorre su un foglio di carta, da un filo sottilissimo, dall'orlo di un foglio, ecc..., supposti privi di materia.

Le linee possono essere *chiuse* o *aperte*. Gli *estremi* di una linea aperta sono *punti*.

In una linea vi sono *infiniti punti*.

5. *L'idea della* **superficie** è data da un velo o da un foglio sottilissimo di carta, dalla parte visibile di un corpo, come quella delle acque, di una parete, ecc.

In una superficie vi sono *infiniti punti* e *infinite linee*.

6. Un insieme di punti si dice **figura geometrica**, o semplicemente **figura**.

I *punti*, le *linee*, le *superficie*, i *solidi* sono *figure geometriche*.

7. Una superficie speciale è il **piano**, come la superficie della lavagna, di un foglio di carta ben disteso, di una lastra di vetro, ecc. Sul piano si disegnano le figure geometriche che si vogliono studiare.

ESERCIZI.

1. Quali sono le proprietà che si riscontrano nei corpi?
2. Quali sono le proprietà dei corpi studiate dalla geometria?
3. Quali sono gli elementi fondamentali della geometria?
4. Disegnare una linea aperta e una linea chiusa.
5. Che è l'intersezione di due linee?
6. Disegnare alcune linee passanti per uno stesso punto.
7. Quante linee passano per uno stesso punto?
8. Disegnare alcune linee passanti per due punti.
9. Quante linee passano per due punti?
10. Che s'intende per figura geometrica?

CAPITOLO II.

Rette, semirette, segmenti.

8. Retta. Tra le linee ve n'è una speciale che si dice **retta**.

Un filo sottilissimo ben teso, il segno che rimane in un foglio dopo una piegatura, un raggio luminoso che entra in una camera oscura da un foro piccolissimo, ci dànno immagini di linee rette.

In una retta vi sono infiniti punti.

Un punto A che si muove su una retta può andare in due *sensi* (fig. 2). Questi due sensi si dicono le **direzioni** della

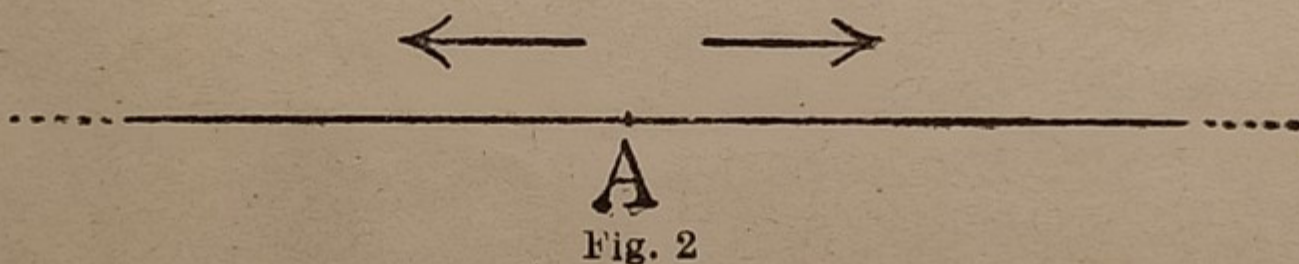



Fig. 2

retta. La retta ha due direzioni e si considera illimitata in ciascuna di esse.

9. Riga. Per disegnare una retta (1) si usa la *riga* (fig. 3).

Fig. 3

La riga è uno strumento di legno o di metallo abbastanza noto, i cui orli hanno forma rettilinea. Si disegna una retta facendo scorrere la punta della matita lungo uno di

---

(1) Si dice brevemente *r tta* invece di *una parte di retta*.

questi orli, quello ove la riga è più sottile, tenendo lo strumento ben fermo su un foglio di carta bianca, generalmente su un foglio di disegno.

Si può disegnare una retta usando un foglio di carta piegato e seguendo colla punta della matita l'orlo del foglio formato dalla piegatura.

I decoratori di stanze usano uno spago annerito conlolvere di carbone; fissano le due estremità in due punti p*A* e *B;* indi tenendo ben teso il filo lo fanno scattare sollevandolo in un punto intermedio; il filo battendo sul muro ascia la traccia di una retta.

10. Prima di usare la riga è bene *verificare* se lo spigolo è *veramente rettilineo*. Per far ciò si tira colla riga una retta su un foglio; indi capovolta la riga si vede se lo spigolo, nella nuova posizione, coincide perfettamente colla retta disegnata. Se ciò non succede la riga non è *buona*.

11. *Per un punto A si possono tirare quante si vogliono rette* (fig. 4).

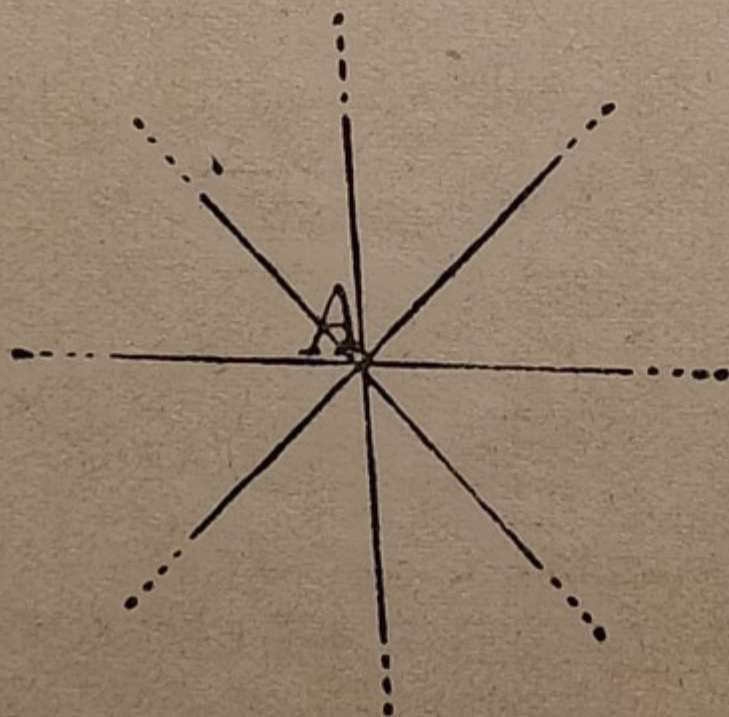



Fig. 4

Per due punti si può condurre una retta sola.

La retta che passa per due punti *A* e *B* (fig. 5) si legge *retta A B*, oppure *retta a*.

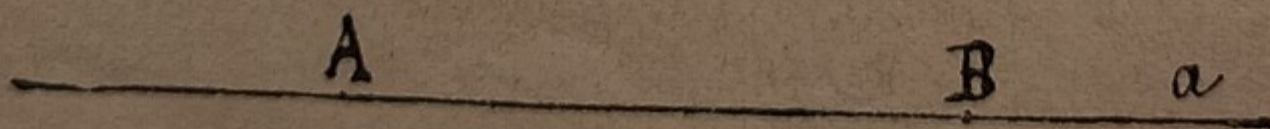



Fig. 5

Una retta è determinata da due qualunque de' suoi punti.
Tutte le rette sono uguali.

12. Semiretta. Ogni punto di una retta la divide in due parti, ciascuna delle quali si dice **semiretta.**

Il punto M (fig. 6) si dice **origine** di ciascuna delle due semirette.

A M B

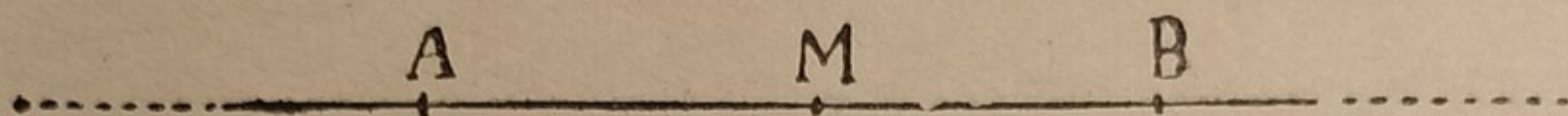



Fig. 6

Una semiretta si enuncia leggendo l'origine, indi un altro suo punto qualunque.

Le due semirette della fig. 6 si leggono *semiretta* $M\,B$, *semiretta* $M\,A$, e ciascuna è il prolungamento dell'altra.

Ogni semiretta è illimitata in *un solo senso.*

13. Segmento. Una retta è divisa da due qualunque de' suoi punti A, B in tre parti (fig. 7).

semiretta A segmento B semiretta

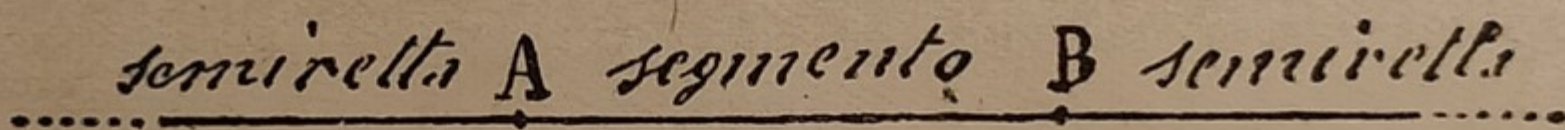



Fig. 7

La parte limitata dai due punti A, B si dice **segmento** $A\,B$, oppure *segmento* $B\,A$; le altre due parti sono due semirette che si dicono i *prolungamenti* del segmento $A\,B$, o $B\,A$.

I punti A, B si dicono gli **estremi** del segmento; il primo **origine**, il secondo **termine.**

Il segmento $A\,B$ si dice pure **distanza** dei due punti A,B.

I punti compresi fra A e B si dicono *interni*, quelli sui prolungamenti *esterni* al segmento.

14. Segmenti consecutivi e adiacenti. Due segmenti distinti $A\,B$, $B\,C$ (fig. 8), che hanno un estremo comune, si di-

cono **consecutivi**. Due segmenti *consecutivi* situati sulla stessa retta (fig. 9) si dicono **adiacenti**.

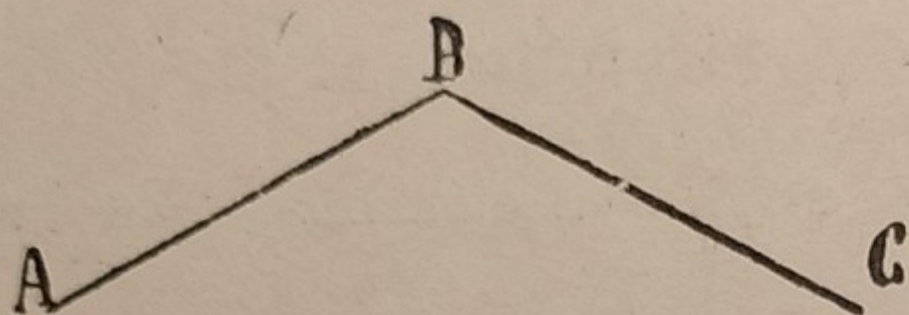



Fig. 8

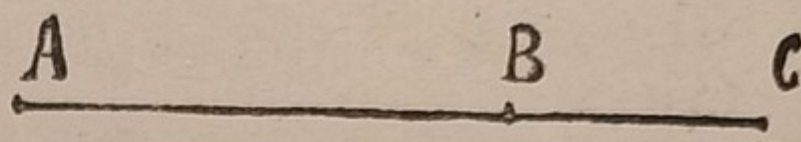



Fig. 9

15. Confronto di segmenti. Dal confronto di due segmenti si deduce che possono essere **uguali** o **disuguali**.

Siano i due segmenti AB e CD (fig. 10); per verificare

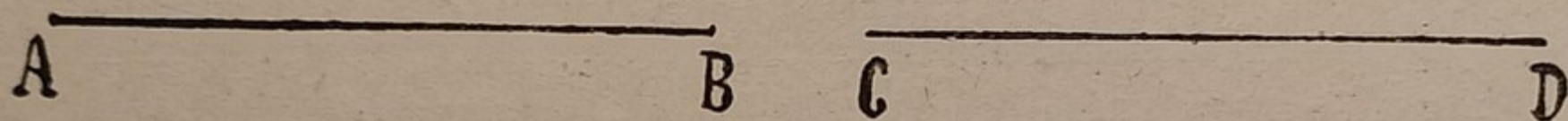



Fig. 10

se sono uguali basta *sovrapporre* CD ad AB in modo che C coincida con A e CD cada su AB. Questo si può eseguire praticamente segnando sull'orlo della piegatura di un pezzetto di carta [1] un tratto uguale a CD e portandolo poi su AB in modo che il primo estremo coincida con A. Se l'altro estremo D coincide con B i due segmenti sono uguali, e si scrive:

$$AB = CD, \textit{ oppure } CD = AB.$$

Se D non coincide con B assumerà una posizione D' che potrà trovarsi tra A e B, oppure sul prolungamento di AB.

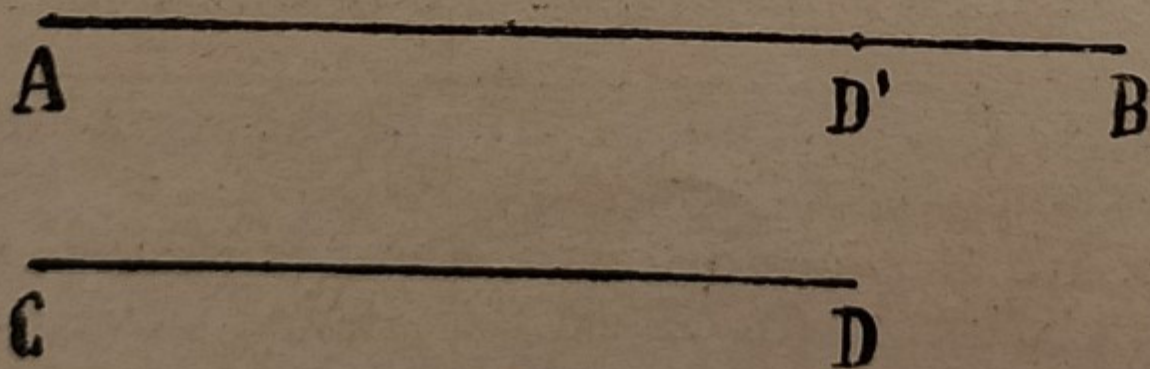



Fig. 11

(1) D'ora innanzi useremo questo metodo pratico per prendere su una retta segmenti uguali a segmenti dati.

Nel primo caso (fig. 11) si dice che $A\,B$ *è maggiore di* $C\,D$. e che $C\,D$ è *minore di* $A\,B$, e si scrive:

$$A\,B > C\,D,\ C\,D < A\,B.$$

Nel secondo caso (fig. 12) si dice che $A\,B$ è *minore di*

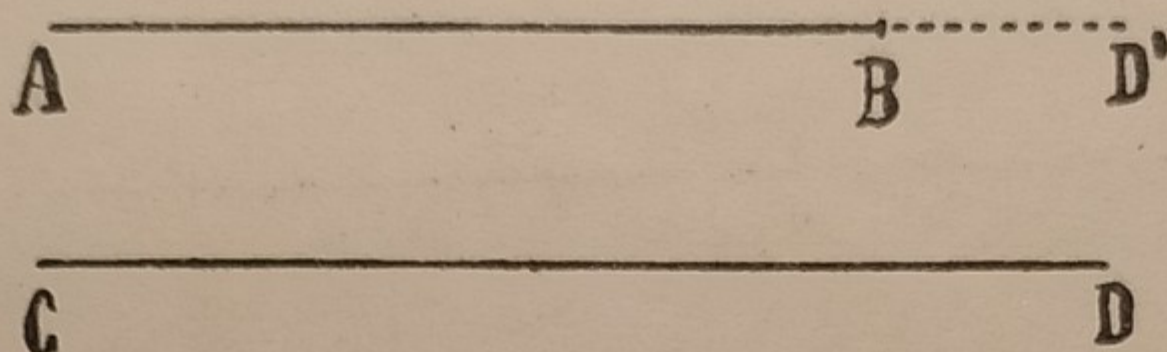



Fig. 12

$C\,D$, e che $C\,D$ è *maggiore di* $A\,B$, e si scrive:

$$A\,B < C\,D, \quad C\,D > A\,B.$$

È evidente che:

Due segmenti uguali ad un terzo sono uguali tra loro.

16. Somma di due o più segmenti. Per sommare due segmenti $A\,B$, $C\,D$, si prendono su una retta due segmenti adiacenti $A'\,B'$, $B'\,C'$ (fig. 13) uguali rispettivamente ai

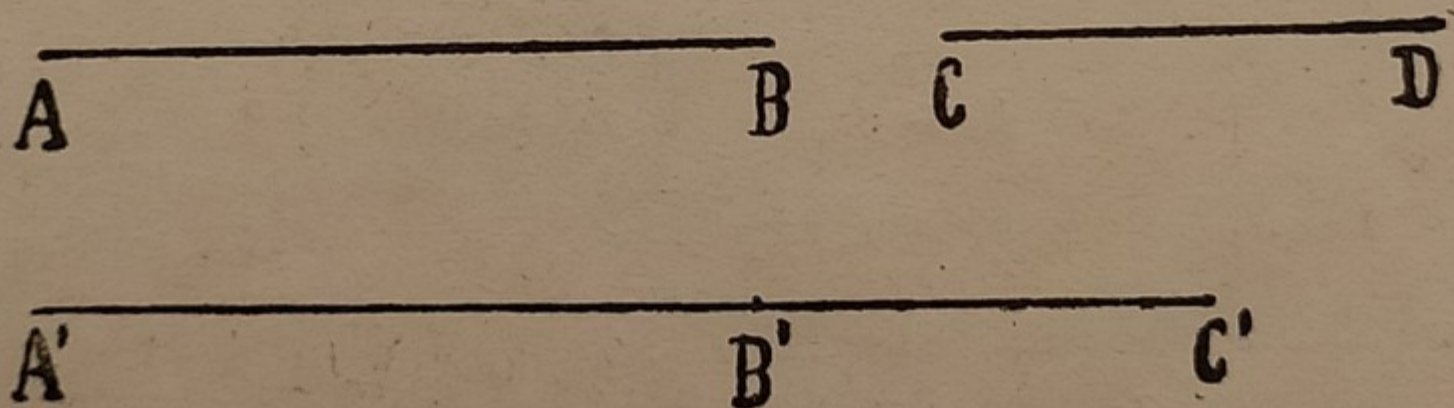



Fig. 13

due segmenti dati; il segmento $A'\,C'$ è la *somma* dei due segmenti $A\,B$, $C\,D$ e si scrive:

$$A'\,C' = A\,B + C\,D.$$

Analogamente si procede per trovare la somma di tre o più segmenti.

La somma di due, tre, ... segmenti uguali ad un segmento dato A B si dice doppio, triplo, ..., oppure multiplo di A B secondo i numeri 2, 3, ...

Il segmento A B si dice sottomultiplo del segmento somma secondo i numeri 2, 3, ...

Nella somma di più segmenti sussistono le proprietà *commutativa* e *associativa.*

Cambiando l'ordine con cui si sommano due o più segmenti, il segmento somma non cambia.

In una somma di più segmenti a due o più di essi si può sostituire la loro somma parziale:

17. Differenza di due segmenti. Per trovare la differenza di due segmenti AB e CD, essendo $AB > CD$, si prende su AB il segmento $AE = CD$ (fig. 14); il segmento

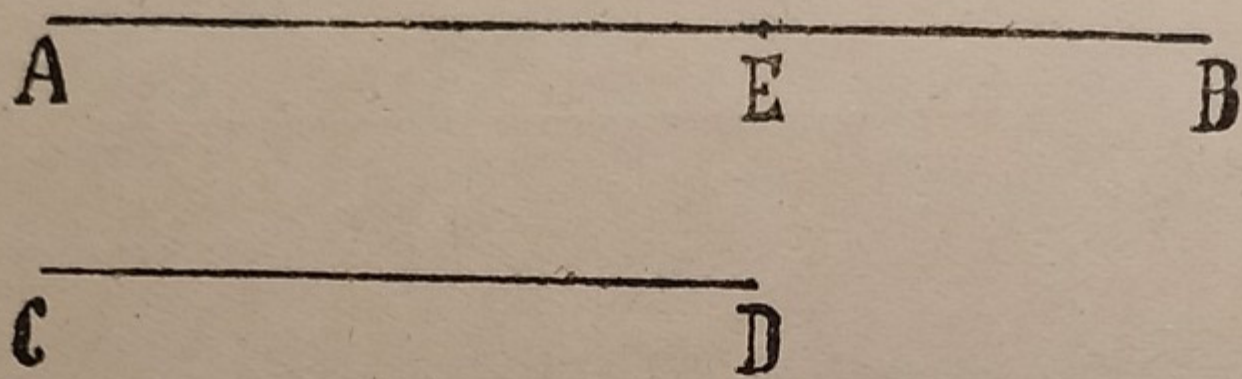



Fig. 14

EB è la *differenza* dei due segmenti AB e CD.

Si scrive:

$$EB = AB - CD.$$

Se $AB = CD$ *la differenza* è *nulla.*

18. Sono evidenti le proposizioni:

Somme di segmenti uguali sono uguali.

Differenze di segmenti uguali sono uguali.

ESERCIZI.

1. Dare alcuni esempi di linee rette.
2. Per due punti passano quante linee e quante rette?
3. Come si verifica l'esattezza della riga?
4. Tirare, a mano libera, una retta e verificarne l'esattezza colla riga.
5. Tirare, a mano libera, una retta e segnare le due direzioni.
6. Dati in un piano i punti A, B, C, D, tirare la retta AB, la semi-retta AC e il segmento AD.
7. Disegnare tre segmenti consecutivi.
8. Disegnare tre segmenti adiacenti.
9. Trovare a vista la somma di quattro segmenti dati.
10. Trovare a vista la differenza di due segmenti dati.

CAPITOLO III.

Piani, semipiani, angoli.

Piano e semipiano.

19. Piano. *Il piano è una superficie speciale, la cui immagine è data da un foglio sottilissimo ben disteso, dalla superficie della lavagna, di un cristallo, delle acque stagnanti, ecc.*

Ogni retta che unisce due punti di un piano giace tutta nel piano.

In un piano si hanno infiniti punti e infinite rette, e siccome le rette le immaginiamo illimitate, anche i *piani sono illimitati.*

L'intersezione di due rette di un piano è un punto.

20. Il piano è determinato:

1.° **Da una retta e da un punto fuori di essa.**
2.° **Da tre punti non posti in linea retta.**
3.° **Da due rette che si intersecano.**

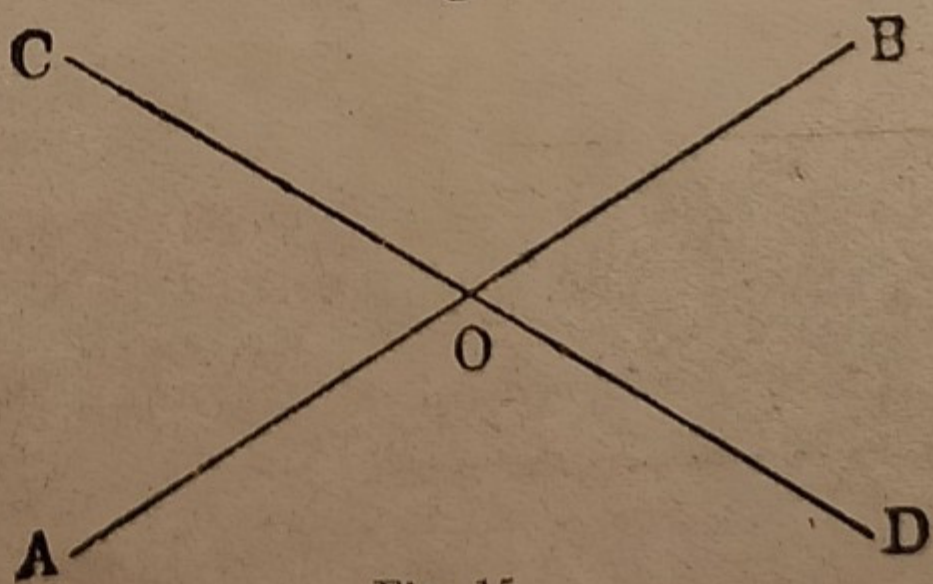
Si enuncia un piano *leggendo una sua retta e un punto fuori di essa*, oppure *tre punti non posti in linea retta*, oppure *due rette che si intersecano.*

Tutti i piani sono uguali.

21. Semipiano. Un piano è diviso da ogni sua retta in due parti uguali; ciascuna di queste parti si dice **semipiano.**

Fig. 15

Per leggere un semipiano si legge la *retta origine*, indi un punto qualunque fuori di essa.

Due rette $A\,B$, $C\,D$ (figura 15) di un piano, che si intersecano in un punto O, si dividono scambievolmente in

due parti; le due semirette, per es. OC, OD, che sono situate nei due semipiani determinati dalla retta AB, si dice che giacciono da *bande opposte* della AB.

Angoli.

22. Due rette di un piano, AB, CD, che si intersecano in un punto O (fig. 15), dividono il piano in quattro parti, ciascuna delle quali si dice **angolo**.

Un angolo è determinato da due semirette OA, OB, aventi la medesima origine O (fig. 16).

Il punto O si dice **vertice** e le semirette OA, OB, si dicono **lati** dell'angolo; OA *origine*, OB *termine*.

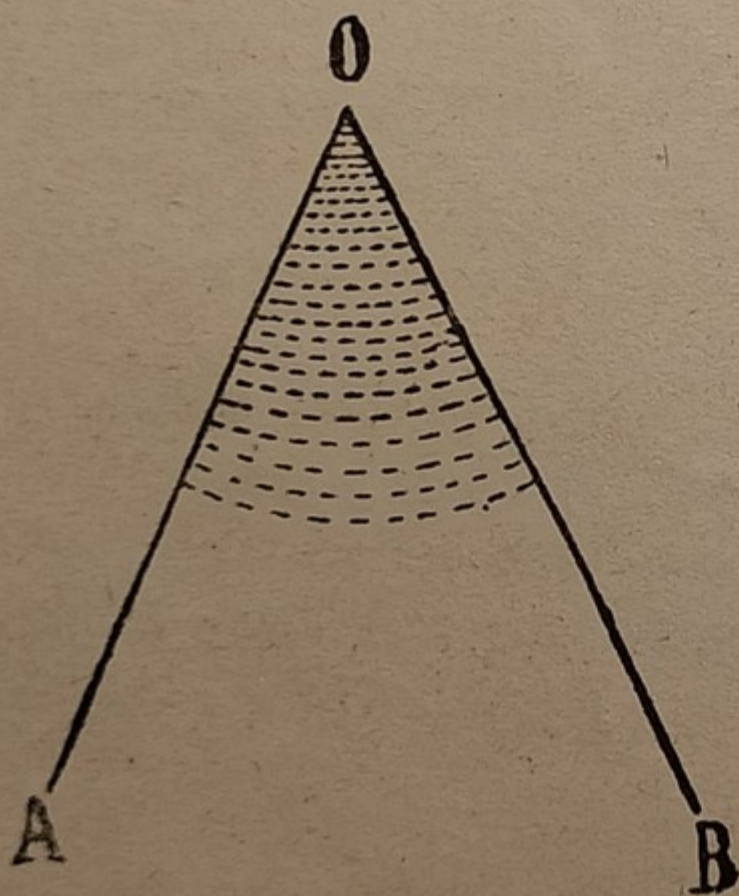



Fig. 16

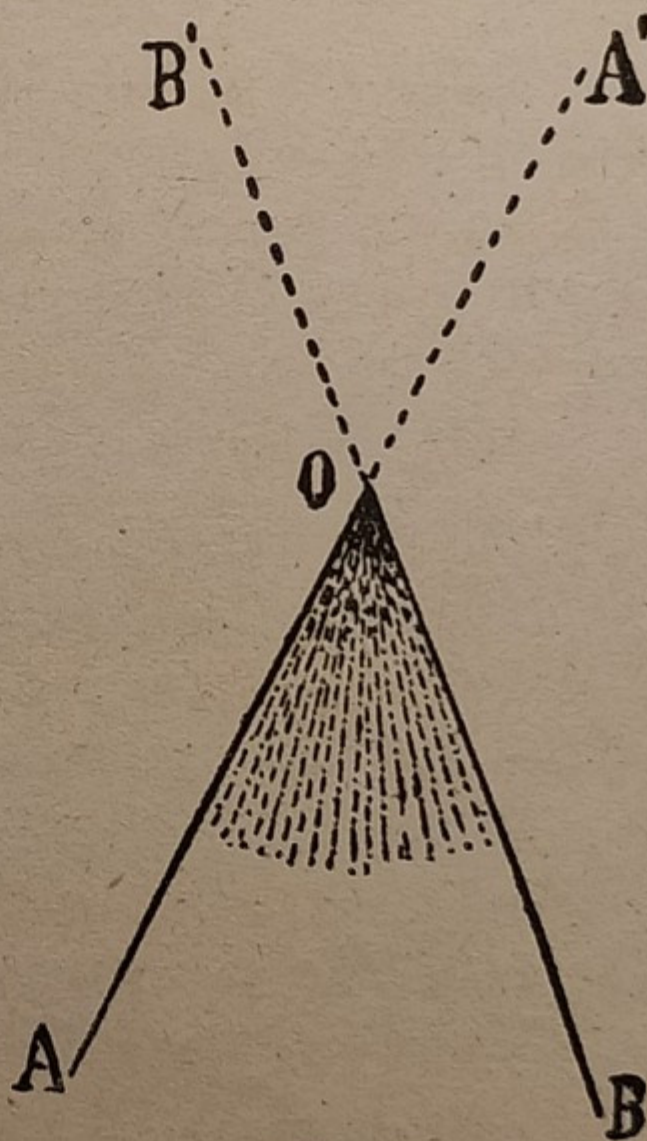



Fig. 17

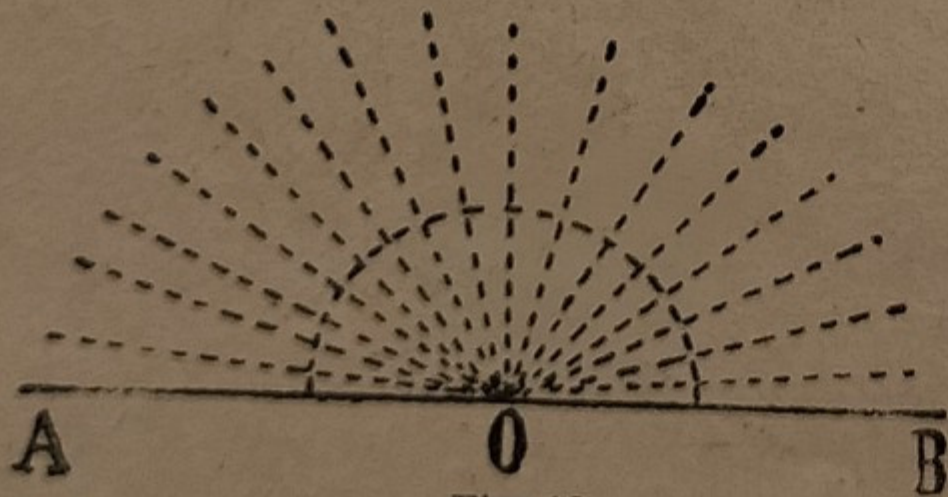



Fig. 18

Per leggere un angolo si legge *un punto di un lato, il vertice e un punto dell'altro lato.*

23. Un angolo si dice **convesso** se i prolungamenti dei lati sono esterni all'angolo (figura 17), **piatto** se i lati sono in *linea retta e opposti* (fig. 18), **concavo**

se i prolungamenti dei lati sono interni all'angolo (fig. 19). L'angolo convesso si indica colla scrittura $A\hat{O}B$.

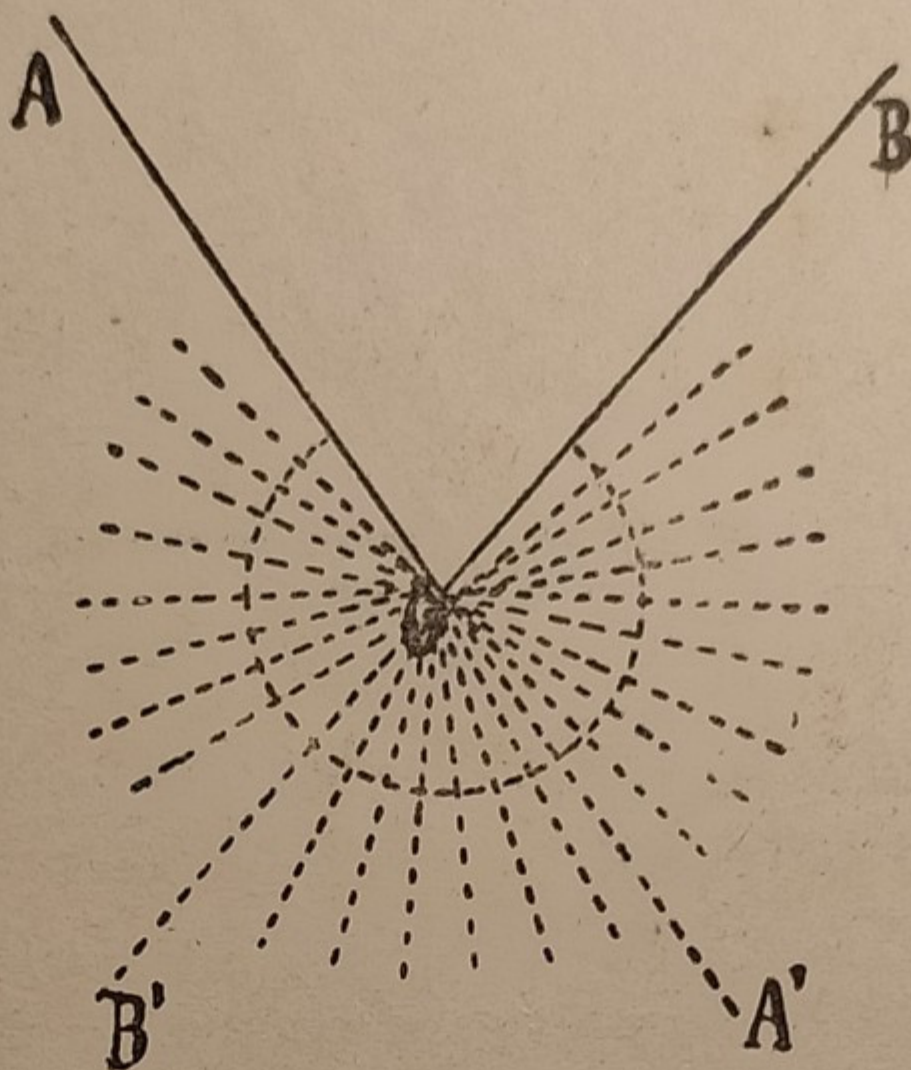



Fig. 19

In generale si prendono in considerazione angoli convessi.

24. Due angoli convessi $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ (fig. 20) si dicono **consecutivi** *se hanno il vertice e un lato comune e gli*

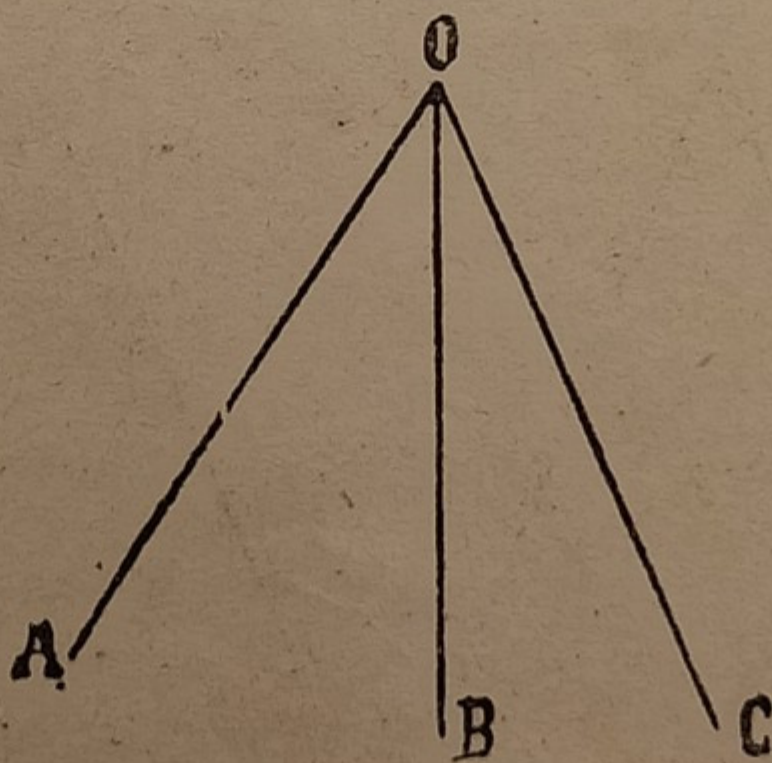



Fig. 20

altri due lati si trovano da bande opposte del lato comune.

Se si prolunga un lato $O A$ di un angolo $A \hat{O} B$ (fig. 21) si ottiene un nuovo angolo $B \hat{O} C$, che si dice **adiacente** ad $A \hat{O} B$.

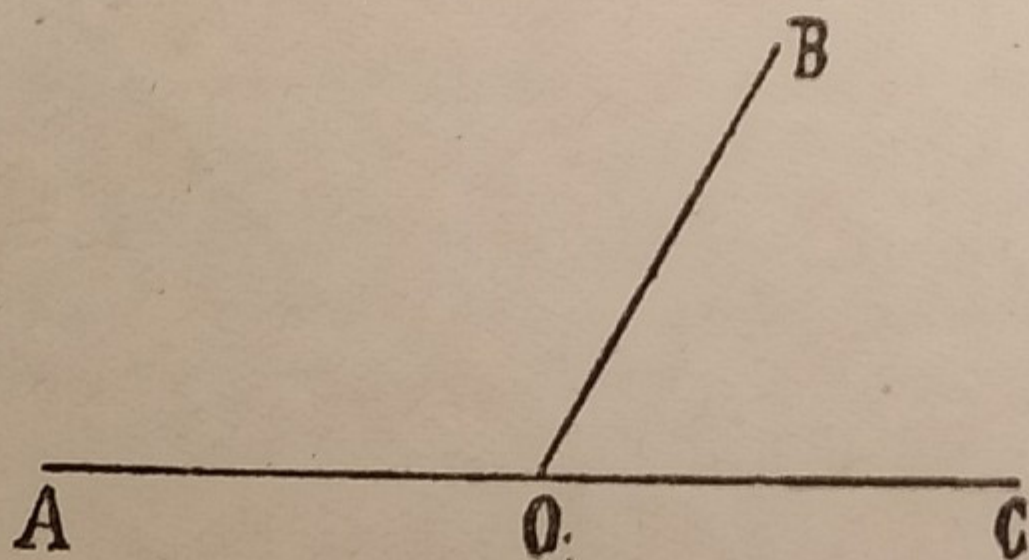



Fig. 21

Due angoli adiacenti $A \hat{O} B$, $B \hat{O} C$ sono consecutivi ed hanno i due lati non comuni sulla stessa retta.

25. Confronto di angoli. Dal confronto di due angoli si deduce che essi possono essere **uguali** o **disuguali**.

Per verificare che due angoli $A \hat{O} B$, $A' \hat{O'} B'$ (fig. 22) sono uguali, basta ricopiare, mediante carta da ricalco, l'angolo $A \hat{O} B$ e sovrapporlo ad $A' \hat{O'} B'$, in modo che $O A$ coincida con $O' A'$ e $A \hat{O} B$ cada su $A' \hat{O'} B'$; se $O B$ coincide con $O' B'$ i due angoli sono uguali.

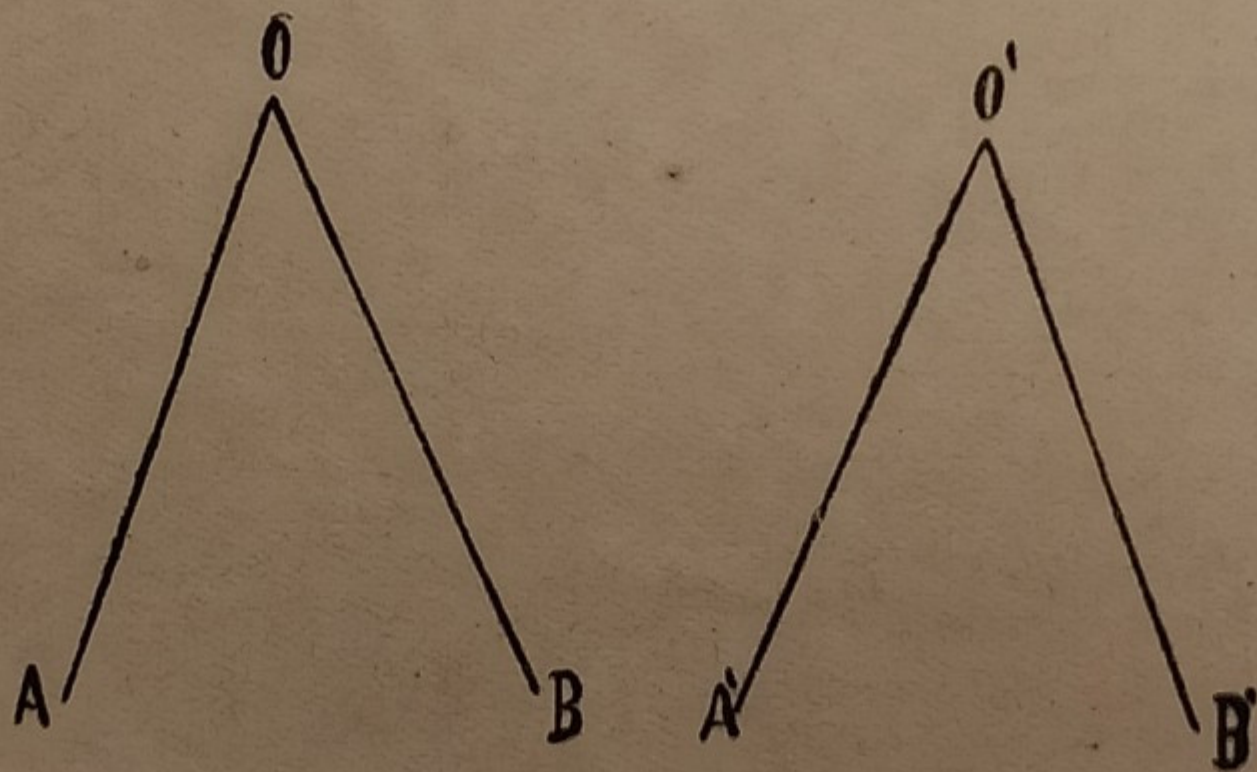



Fig. 22

Si scrive:

$$A \hat{O} B = A' \hat{O'} B'.$$

Se $O B$ non coincide con $O' B'$ assumerà una posizione

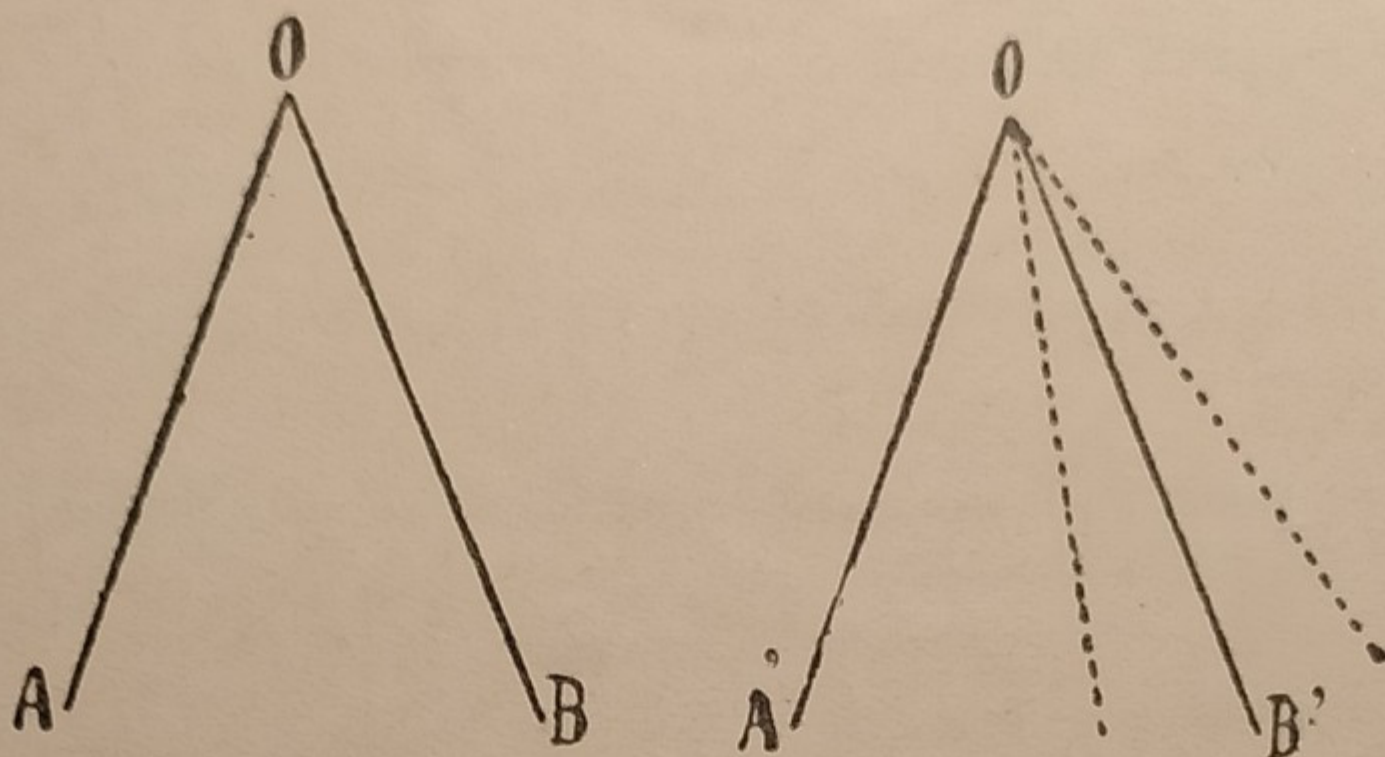



Fig. 23

esterna od interna ad $A' \hat{O}' B'$ (fig. 23). Nel primo caso l'angolo $A \hat{O} B$ è **maggiore** di $A' \hat{O}' B'$ e si scrive:

$$A \hat{O} B > A' \hat{O}' B';$$

nel secondo caso $A \hat{O} B$ è **minore** di $A' \hat{O}' B'$ e si scrive:

$$A \hat{O} B < A' \hat{O}' B'.$$

27. È evidente che:

Tutti gli angoli piatti sono uguali.

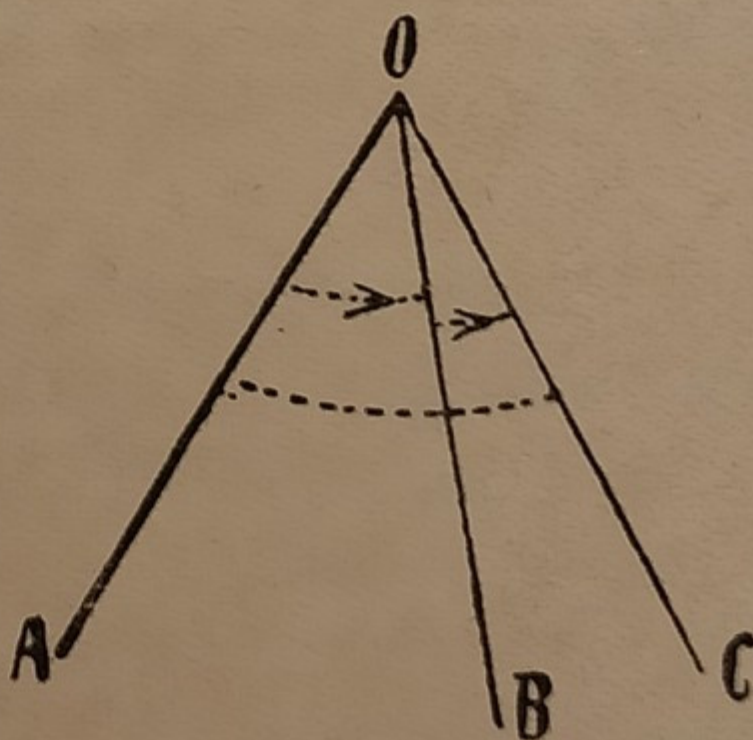
Due angoli uguali ad un terzo sono uguali tra loro.

28. Somma di due o più angoli. Siano $A \hat{O} B$, $B \hat{O} C$ (fig. 24) due angoli consecutivi; essi formano l'angolo $A \hat{O} C$ che si dice **somma** dei due angoli dati, e si scrive:

$$A \hat{O} C = A \hat{O} B + B \hat{O} C.$$

Quindi: *Per sommare due angoli si rendono consecutivi; l'angolo formato dai due lati non comuni è la* **somma** *dei due angoli dati.*

Fig. 24

Analogamente si procede per sommare tre o più angoli.

La somma di due, tre, ... angoli uguali ad un angolo dato $A \hat{O} B$ si dice doppio, triplo, ..., oppure multiplo di $A \hat{O} B$ secondo i numeri 2, 3. ...

L'angolo $A\hat{O}B$ si dice sottomultiplo dell'angolo somma secondo i numeri 2, 3, ...

Nella somma di più angoli sussistono le proprietà *commutativa* e *associativa*.

Cambiando l'ordine con cui si sommano due o più angoli, l'angolo somma non cambia.

In una somma di più angoli a due o più di essi si può sostituire la loro somma parziale.

29. Due angoli che diano per somma un angolo piatto si dicono **supplementari**.

Due angoli adiacenti sono supplementari.

Due angoli supplementari di un terzo sono uguali tra loro.

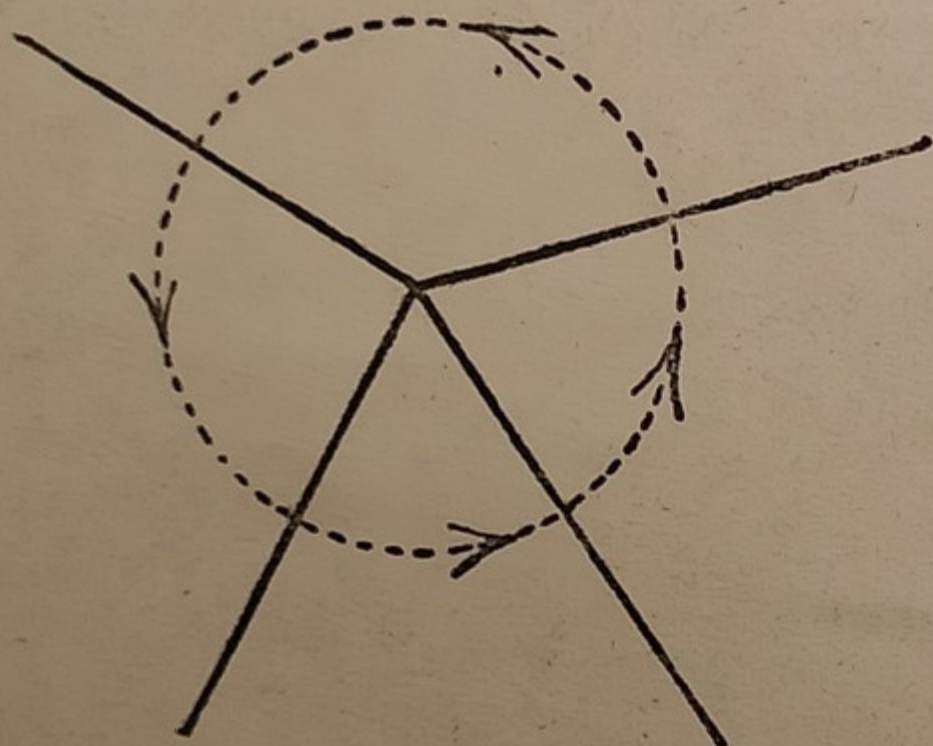



Fig. 25

30. La somma di due o più angoli può occupare tutto il piano; l'angolo somma si dice *angolo di un giro*, o semplicemente *angolo giro* (fig. 25).

L'angolo giro equivale a due angoli piatti.

31. Differenza di due angoli. Dato l'angolo $A\hat{O}C$, *somma* dei due angoli $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ (fig. 26), si dice che ciascuno di questi angoli è la **differenza** tra l'angolo somma e l'altro.

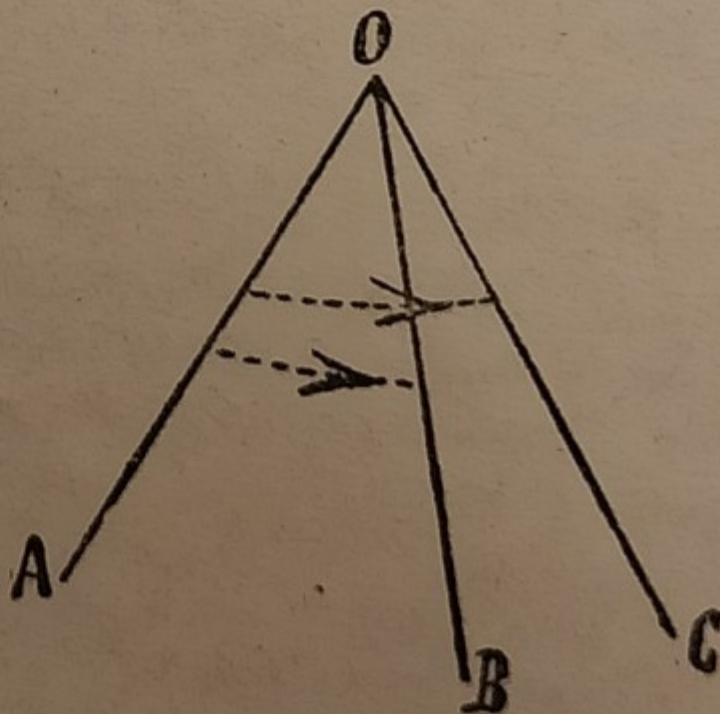



Fig. 26

Si scrive:

$$A\hat{O}B = A\hat{O}C - B\hat{O}C,$$
$$B\hat{O}C = A\hat{O}C - A\hat{O}B.$$

La differenza di due angoli uguali è nulla.

32. Angoli opposti al vertice. **Due angoli si dicono opposti al vertice se i lati di uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro.**

Gli angoli $A\hat{O}B$, $A'\hat{O}B'$ (fig. 27) sono opposti al vertice.

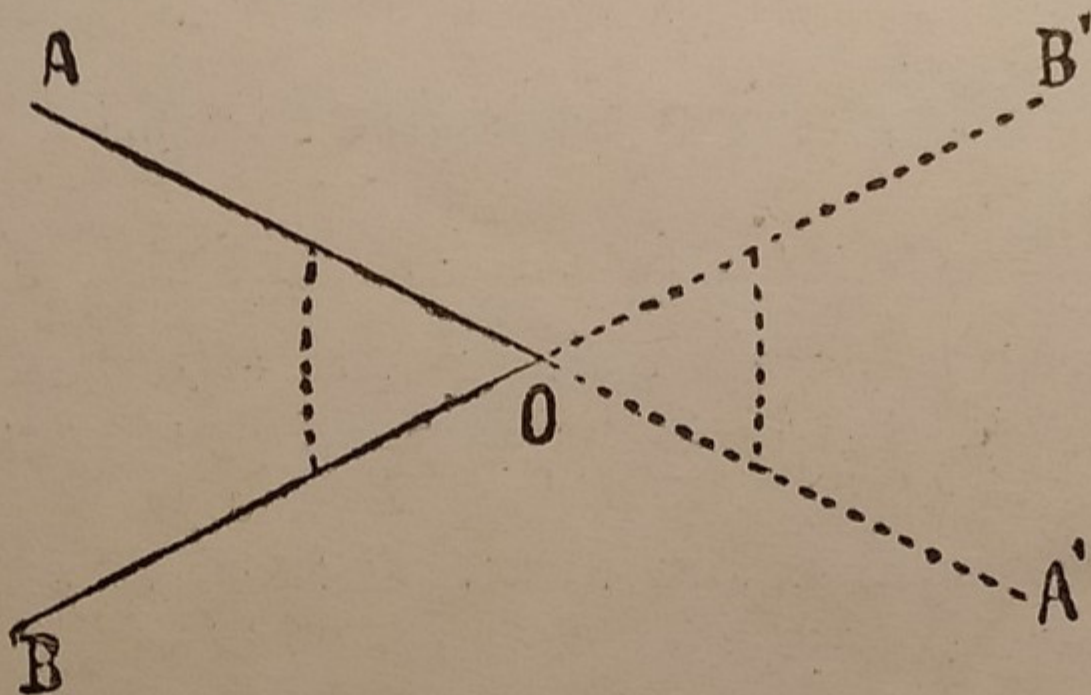



Fig. 27

Gli angoli opposti al vertice sono uguali.

33. *La semiretta che divide un angolo in due parti uguali si dice* **bisettrice** *dell'angolo.*

Praticamente si può dividere un angolo, disegnato su carta da ricalcoi in *due parti uguali*, piegando il foglio in modo che vengano a coincidere lati: la semiretta uscente dal vertice, rappresentata dalla piegatura del foglio, divide l'angolo in due parti uguali.

ESERCIZI.

1. Dare alcuni esempi di superficie piane.
2. Come si può determinare un piano?
3. Disegnare un angolo convesso, uno piatto e uno concavo.
4. Disegnare due angoli consecutivi.
5. Disegnare due angoli adiacenti.
6. Disegnare a mano libera due angoli uguali.
7. Disegnare a mano libera la somma di tre angoli dati.
8. Disegnare a mano libera due angoli supplementari.
9. Disegnare a mano libera quattro angoli la cui somma sia uguale a un angolo giro.
10. Disegnare, a mano libera, l'angolo differenza di due angoli dati.
11. Disegnare, a mano libera, un angolo e il suo opposto al vertice.
12. Disegnare a mano libera la bisettrice di un angolo dato.

CAPITOLO IV.

Rette perpendicolari.

34. La retta che unisce due punti, situati da bande opposte rispetto ad una retta, interseca questa retta in un punto.

Sia la retta $A\,B$ ed un punto C fuori di essa, disegnati su carta da ricalco (fig. 28).

Piegando il foglio secondo la $A\,B$, C verrà ad assumere nell'altro semipiano la posizione C'. Si ritorni il foglio nella posizione primitiva e si unisca C con C'. La retta $C\,C'$ incontra $A\,B$ in un punto D e forma con essa quattro angoli uguali.

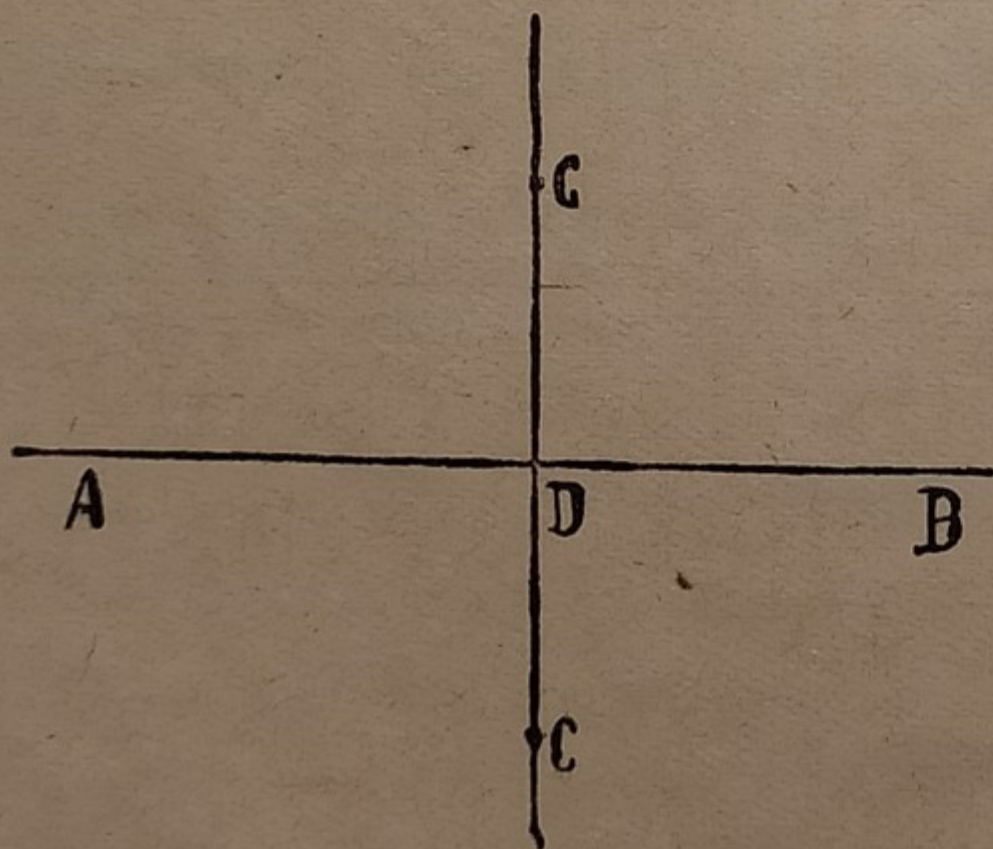



Fig. 28

La retta $C\,C'$ si dice **perpendicolare** alla $A\,B$.

Due rette si dicono perpendicolari tra loro se incontrandosi formano quattro angoli uguali.

Ciascuno di questi angoli si dice *angolo* **retto.**

L'angolo piatto è la somma di due angoli retti.
L'angolo giro è la somma di quattro angoli retti.

35. Dato un angolo piatto $A\hat{O}B$ (fig. 29), su carta da ricalco, si pieghi il foglio in modo che OA venga a coincidere con OB; la piegatura del foglio secondo la OC, divide l'angolo piatto in due parti uguali, cioè è *bisettrice dell'angolo piatto*.

La bisettrice di un angolo piatto è perpendicolare alla retta formata dai due lati dell'angolo.

Fig. 29

Quindi:

L'angolo retto è la metà di un angolo piatto e la quarta parte di un angolo giro.

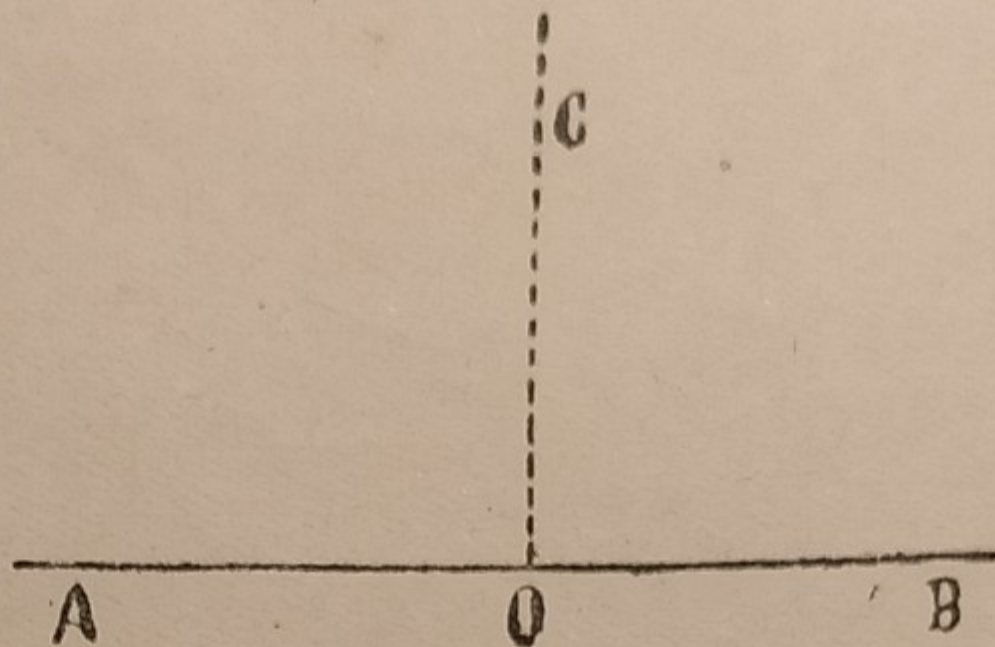
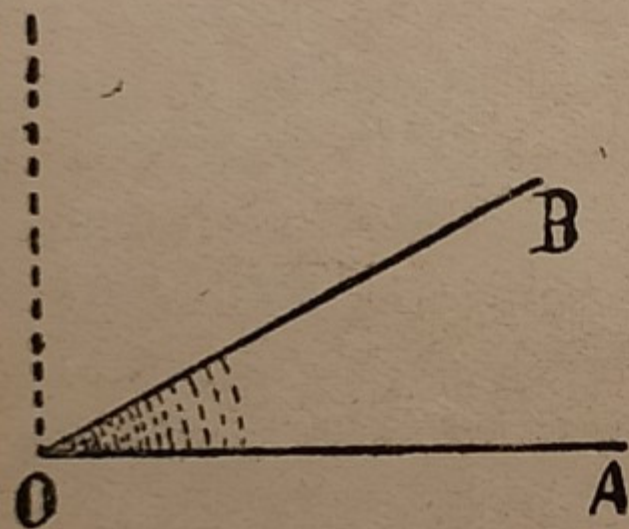



Fig. 30

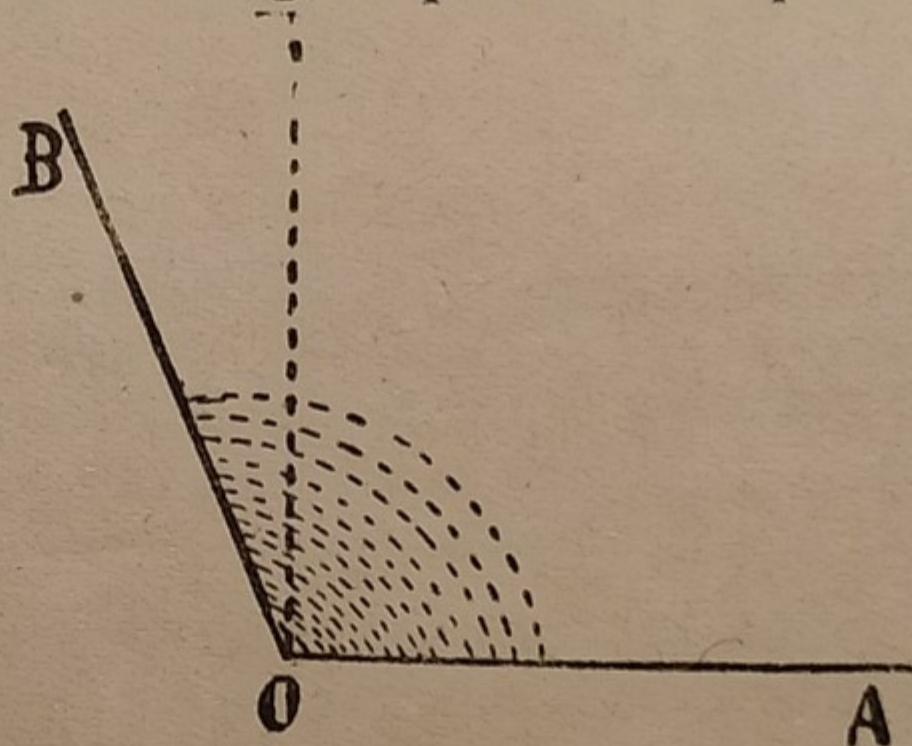



Fig 31

36. Un angolo *minore* di un angolo retto si dice **acuto** (fig. 30).

Un angolo *maggiore* di un angolo retto si dice **ottuso** (figura 31).

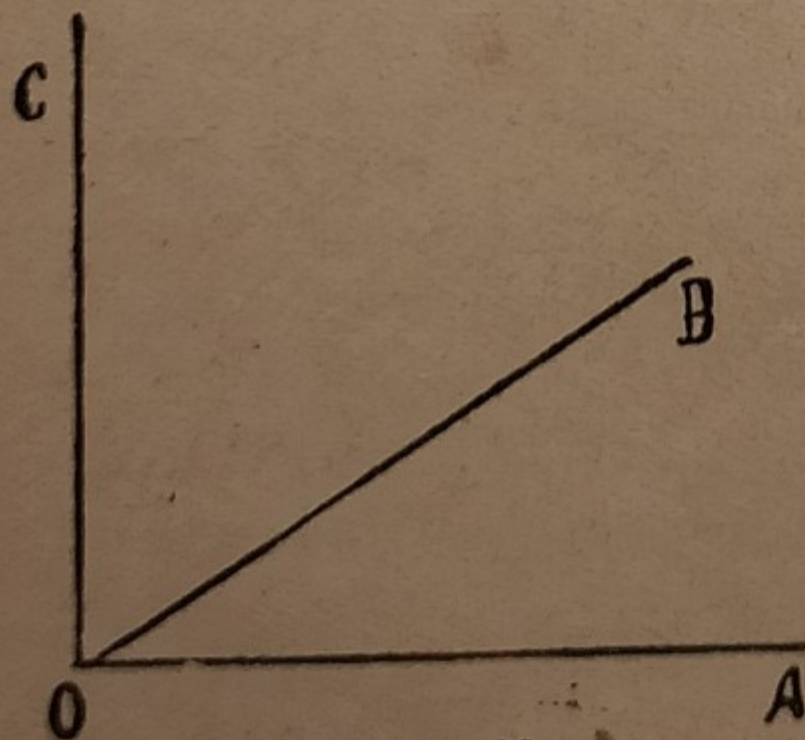



Fig. 32

37. Due angoli $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ (fig. 32) si dicono **complementari** se la loro somma è uguale ad un angolo retto.

Angoli complementari di angoli uguali, o di uno stesso angolo, sono uguali.

La squadra.

38. Per tirare perpendicolari, e per disegnare angoli retti, si usa praticamente la squadra, strumento avente due lati AB, BC perpendicolari (fig. 33).

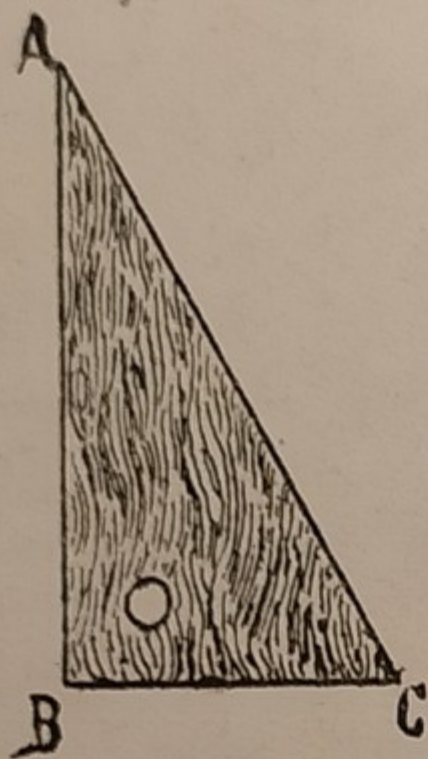
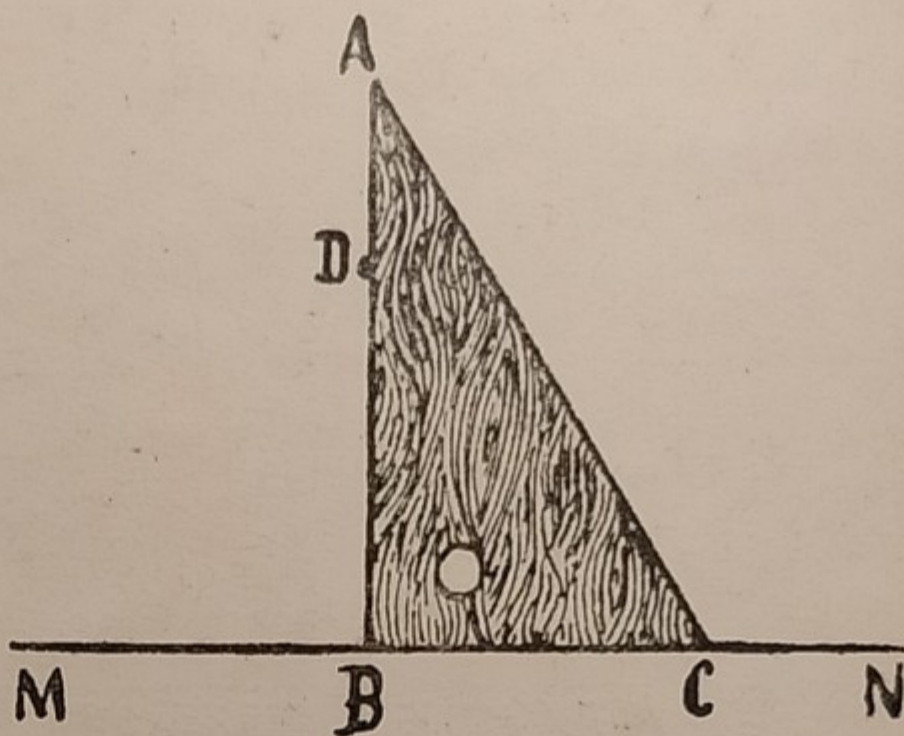



Fig. 33 Fig. 34

Per condurre da un punto qualunque D la perpendicolare alla retta MN (fig. 34), si dispone la squadra in modo che un lato BC coincida colla MN; indi si fa scorrere la squadra sulla MN finchè il lato AB contenga D; facendo scorrere la punta di una matita lungo il lato AB della squadra, si ottiene la perpendicolare richiesta.

Da un punto non si può tirare che una sola perpendicolare ad una retta.

Il segmento perpendicolare, tirato da un punto ad una retta, si dice **distanza** *del punto dalla retta.*

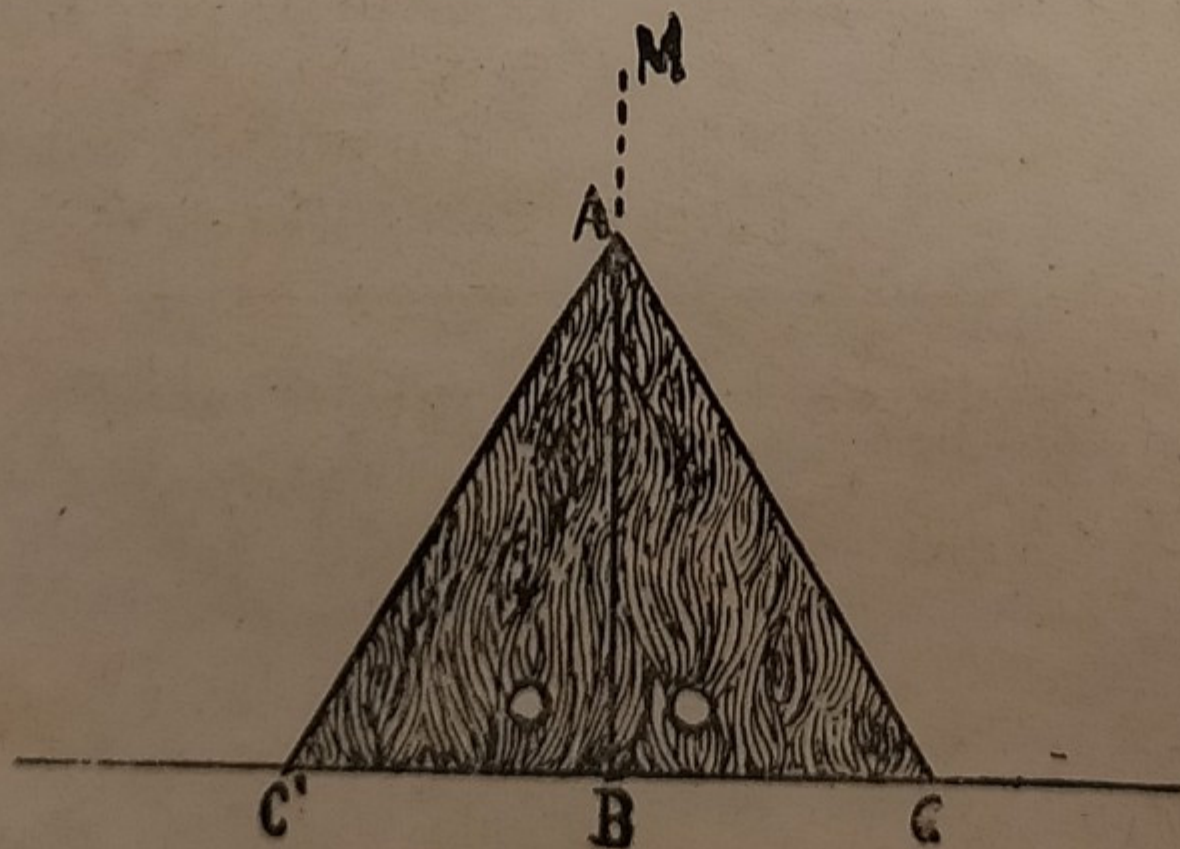



Fig. 35

39. Verifica della squadra. Prima di usare una squadra bisogna verificare se è esatta, cioè se i due lati $A\,B$ e $B\,C$ formano un angolo retto.

Mediante detta squadra si tira da un punto la perpendicolare $B\,M$ ad una retta (fig. 35), indi si rovescia la squadra in modo che il lato $B\,C$ assuma la posizione $B\,C'$; se l'altro lato $A\,B$ coincide perfettamente colla perpendicolare condotta, la squadra è esatta.

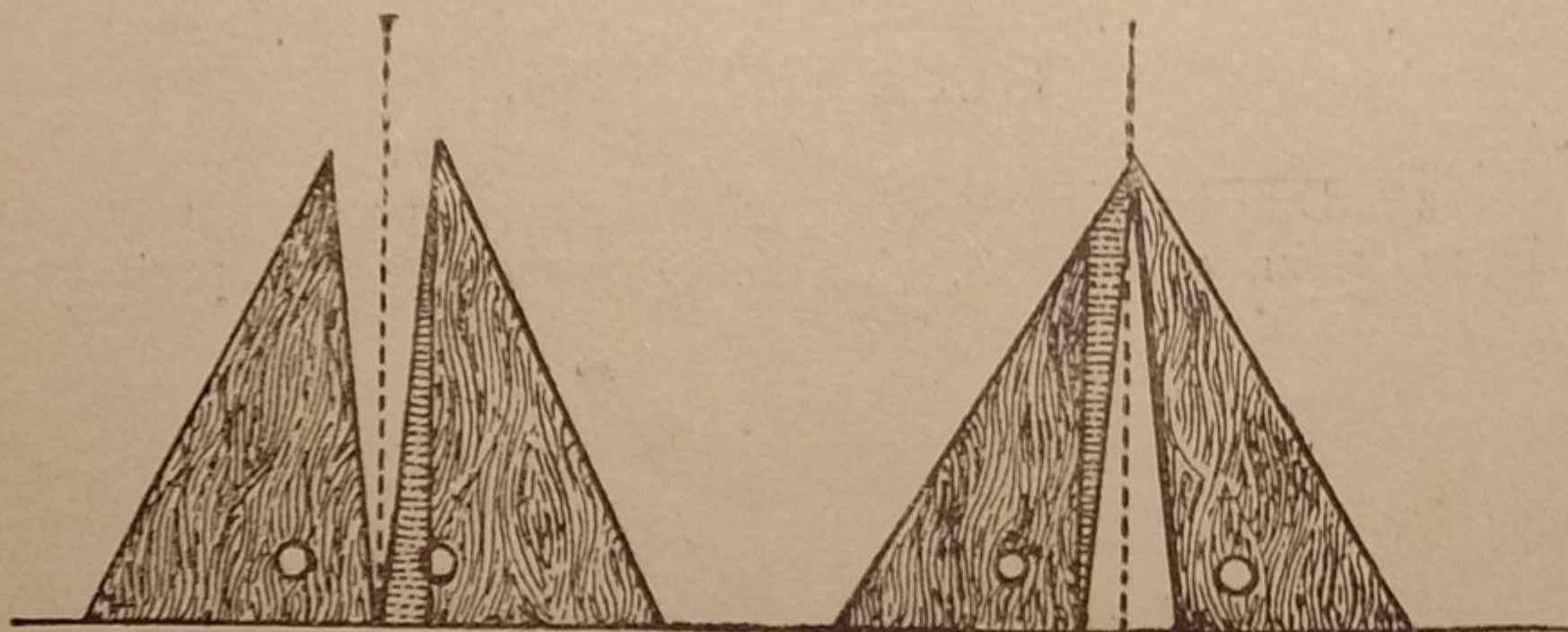



Fig. 36

Se questo non si verifica, la squadra dev'essere corretta secondo la fig. 36, togliendo la parte tratteggiata.

ESERCIZI.

1. Disegnare a mano libera e in varie posizioni due rette perpendicolari tra loro.
2. Tirare, sperimentalmente (mediante carta da ricalco) da un punto, fuori o sopra una retta, la perpendicolare alla retta.
3. Disegnare, a mano libera, un angolo retto, uno acuto e uno ottuso.
4. Disegnare, a mano libera, due angoli complementari.
5. Tirare a vista da un punto, fuori di una retta, alla retta, e in diverse posizioni, la perpendicolare alla retta.
6. Tirare a vista, da un punto di una retta, alla retta, e in diverse posizioni, la perpendicolare alla retta.
7. Tirare colla squadra la perpendicolare ad una retta da un punto di essa.
8. Tirare colla squadra la perpendicolare ad una retta da un punto fuori di essa.
9. Che angolo formano le lancette di un orologio che segna le ore 13?
10. Che angolo formano le lancette di un orologio che segna le ore 3 ?
11. Che angolo formano le lancette di un orologio che segna le ore 15 ?
12. Che angolo formano le lancette di un orologio che segna le ore 6 ?

CAPITOLO V.

Rette parallele.

40. Due rette AB, CD, di un piano (fig. 37), tagliate da un terza retta EF, che dicesi *trasversale*, nei punti M

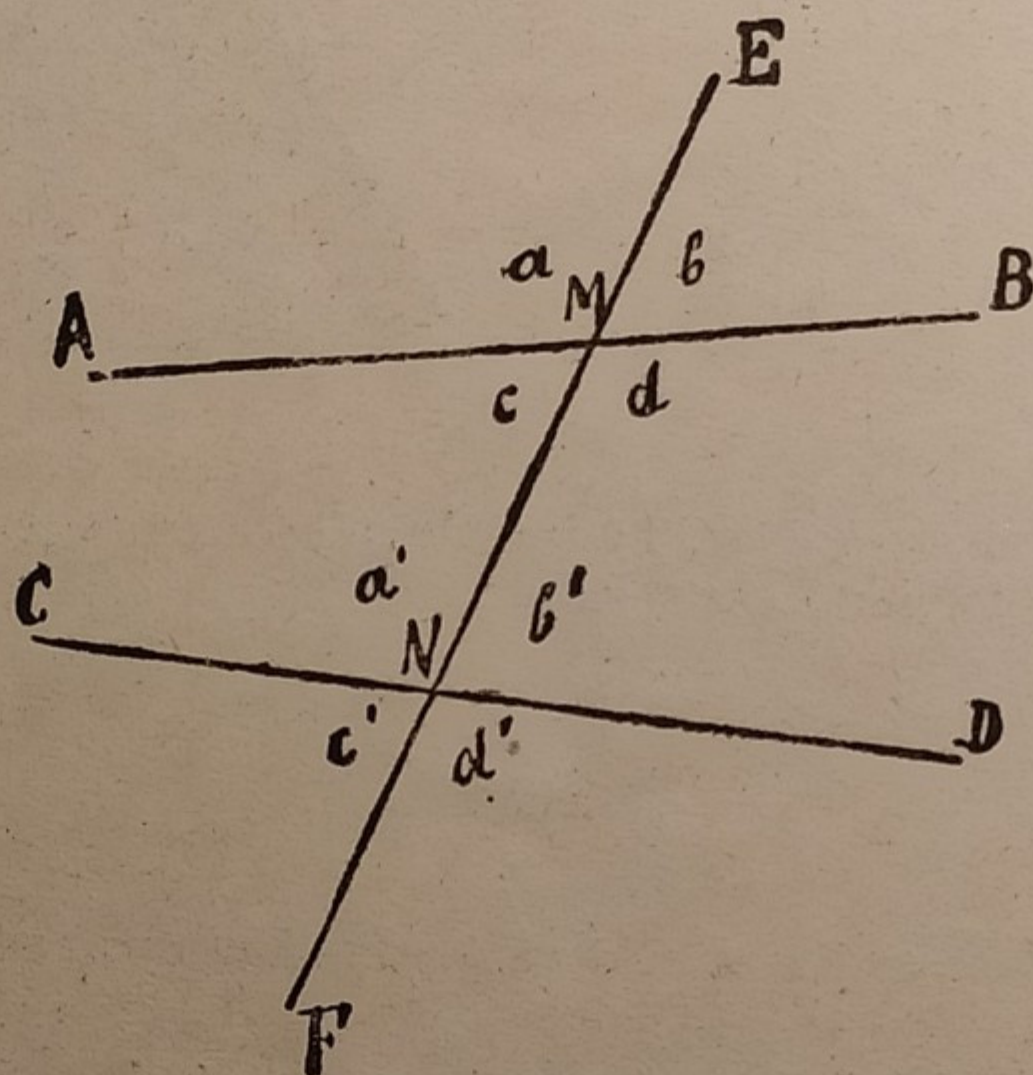



Fig. 37

ed N, formano otto angoli che brevemente indicheremo colle lettere a, b, c, d, a', b', c', d'.

Gli angoli a, b, c', d' si dicono **esterni**; c, d, a', b' **interni**.
Le *coppie di angoli* a, a'; b, b'; c, c'; d, d' *si dicono* **corrispondenti**.
» » » » c, b'; d, a' si dicono **alterni interni**.
» » » » a, d'; b, c' » » » **esterni**.
» » » » c, a'; d, b' » » **coniugati interni**.
» » » » a, c'; b, d' » » **coniugati esterni**.

41. Due rette distinte di un piano possono avere, l'una rispetto all'altra, due posizioni.

1.° Possono avere un punto comune; allora si dice che si *intersecano*.

2.° Possono non avere nessun punto comune, e allora si dice che sono **parallele**.

Quindi:

Due rette si dicono PARALLELE se, poste nello stesso piano, non hanno alcun punto comune.

42. Se due rette tagliate da una trasversale, formano un angolo qualunque, uguale al suo corrispondente, sono parallele.

Questo si verifica sperimentalmente ricopiando la figura su carta da ricalco, capovolgendola dall'alto al basso, indi da destra a sinistra; la figura in questa nuova posizione coincide perfettamente colla prima.

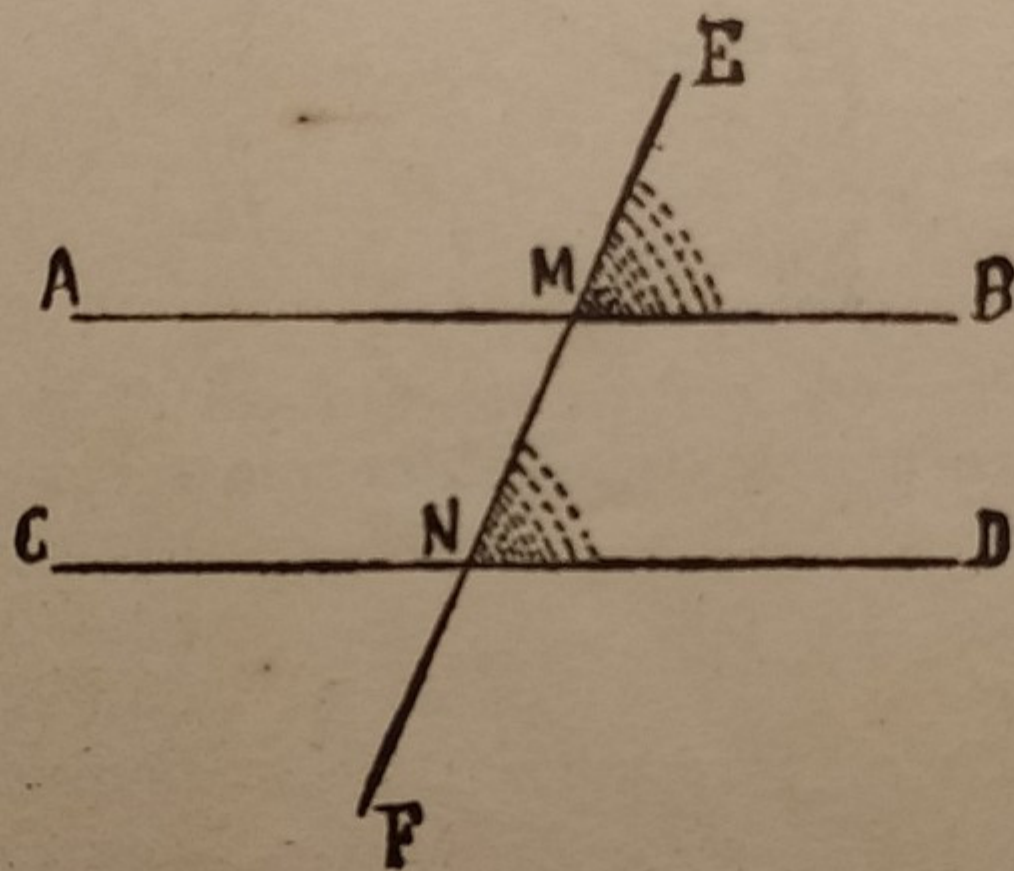



Fig. 88

Le due rette $A\,B$, $C\,D$ (fig. 38) saranno parallele se, tagliate dalla $E\,F$, formeranno gli angoli corrispondenti $E\,\hat{M}\,B$, $E\,\hat{N}\,D$ uguali.

43. *Osservazione.* — Due rette sono pure parallele se, tagliate da una trasversale, formano *una coppia di angoli alterni uguali*, oppure *una coppia di angoli coniugati supplementari*.

44. Si possono disegnare rette parallele mediante la squadra; ciò è indicato dalla fig. 39.

Per un punto dato condurre la parallela ad una retta data, non passante per il punto.

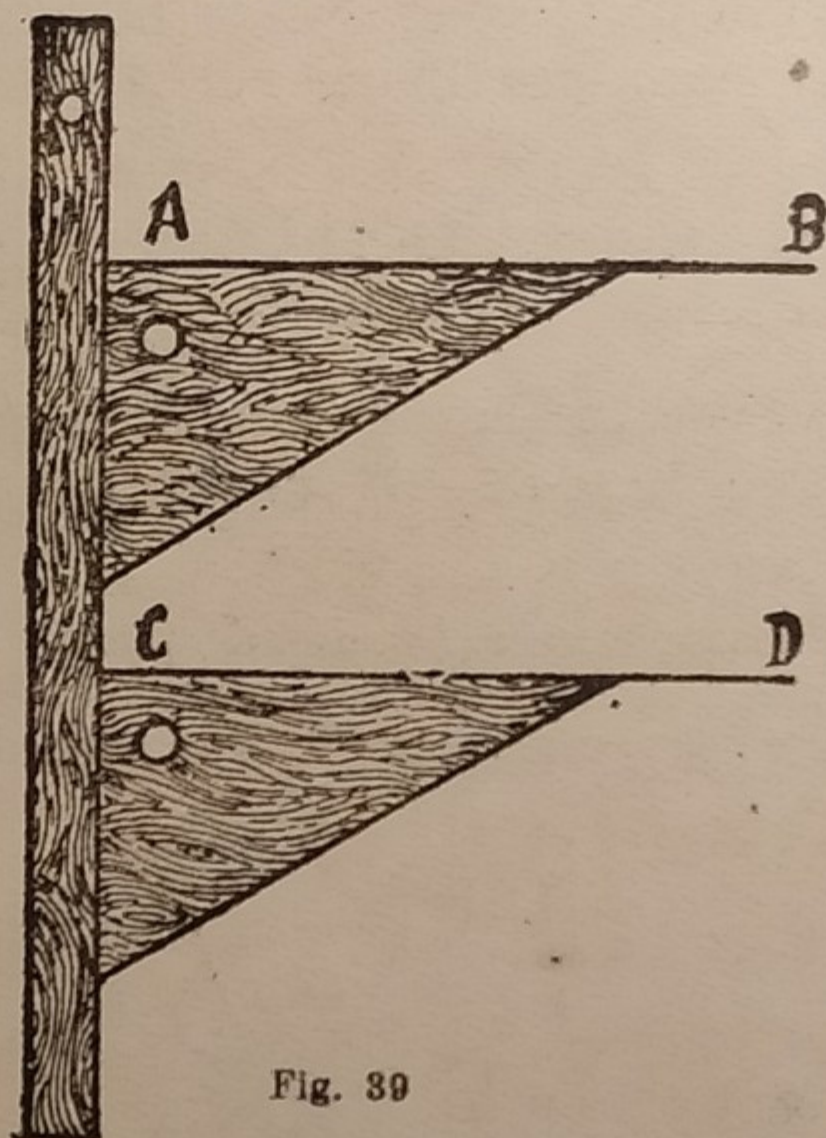



Fig. 39

Sia *A B* la retta e il punto *C* fuori di *A B* (figura 40). Si fa coincidere uno spigolo dell'angolo retto di una squadra con *A B*, indi si pone una riga lungo l'altro spigolo dell'angolo retto; si fa scorrere la squadra, a contatto colla riga, finchè il primo spigolo passi per *C*. Si disegna la *C D* che sarà parallela ad *A B*.

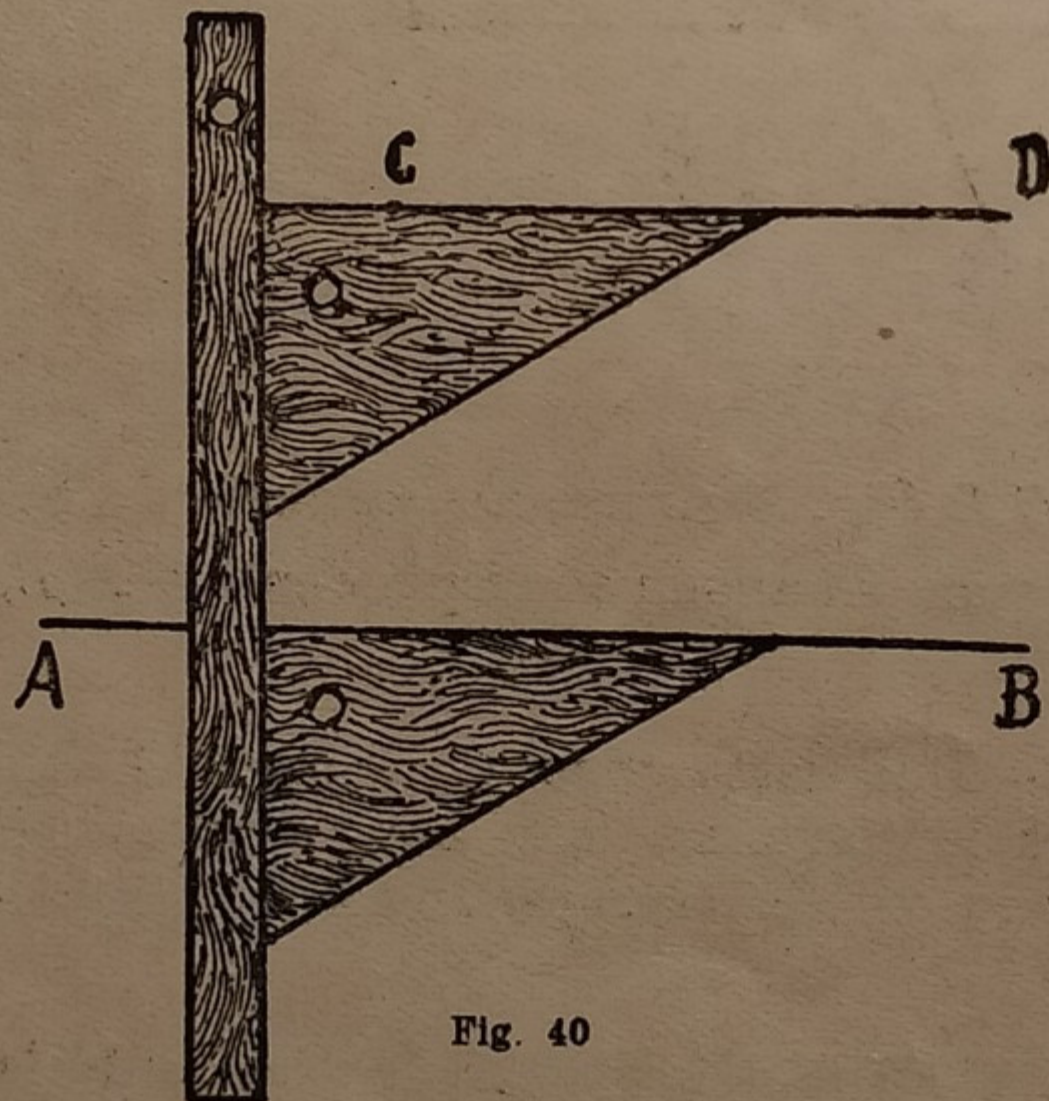



Fig. 40

45. Da questa costruzione risulta evidente:

Per un punto fuori di una retta, si può tirare una sola retta parallela alla data.

46. È pure chiaro che:

1.° **Due rette perpendicolari ad una terza sono parallele tra loro.**

2.° **Due rette parallele ad una terza sono parallele tra loro.**

47. Si verifica pure sperimentalmente, disegnando la figura su carta da ricalco, che:

Due rette parallele, tagliate da una trasversale, formano:

1.° **Gli angoli corrispondenti uguali.**

2.° **Gli angoli alterni uguali.**

3.° **Gli angoli coniugati supplementari.**

48. Date due rette parallele $A B$, $C D$ (fig. 41) tiriamo

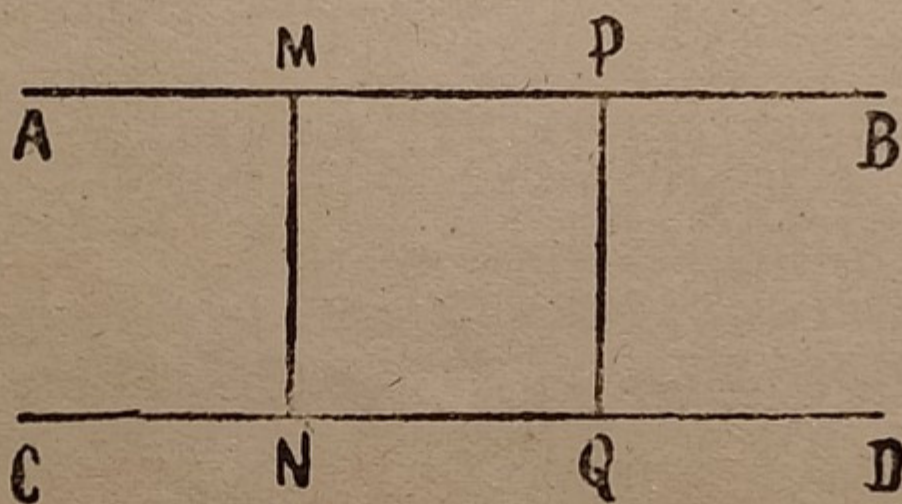



Fig. 41

da un punto qualunque M di $A B$ la perpendicolare $M N$ a $C D$. Questo segmento $M N$ si dice **distanza** delle due rette parallele.

La distanza $P Q$, tirata dal punto P, è uguale ad $M N$. Quindi:

La distanza di due rette parallele è il segmento perpendicolare tirato da un punto qualunque di una retta all'altra.

ESERCIZI.

1. Disegnare, a mano libera, e in varie posizioni, due rette parallele.
2. Disegnata una retta e un punto fuori di essa, tirare, a mano libera, e poi colla squadra, da quel punto, la parallela alla retta.
3. Tirare, a mano libera, due rette parallele e tagliarle con una trasversale; indi leggere le coppie di angoli corrispondenti, di angoli alterni e di angoli coniugati.
4. Disegnate, a mano libera, due rette parallele, con una trasversale, tirare le bisettrici di due angoli corrispondenti e dire perchè sono parallele.
5. Disegnate, a mano libera, due rette parallele con una trasversale, tirare le bisettrici di due angoli alterni e dire perchè sono parallele.
6. Se due angoli hanno i lati paralleli e rivolti nello stesso senso sono uguali.
7. Se due angoli hanno i lati paralleli e rivolti in senso contrario sono uguali.
8. Se due rette formano con una trasversale due angoli corrispondenti uguali, sono uguali gli altri corrispondenti, sono uguali gli alterni e sono supplementari i coniugati.
9. Se due rette formano con una trasversale due angoli coniugati supplementari, sono supplementari anche gli altri coniugati, sono uguali i corrispondenti e gli alterni.
10. Se due angoli coniugati interni formati da due rette con una trasversale hanno somma minore di un angolo piatto, la somma degli altri due coniugati interni è maggiore di un angolo piatto. Le due rette da quale parte si incontrano?

CAPITOLO VI.

Poligoni - Triangoli.

49. Si dice **spezzata** una linea formata da *segmenti;* i segmenti si dicono **lati** della spezzata.

L'*origine* del primo lato si dice **origine** della spezzata: il *termine* dell'ultimo, **termine** della spezzata.

Una spezzata è **convessa** (fig. 42) se il prolungamento

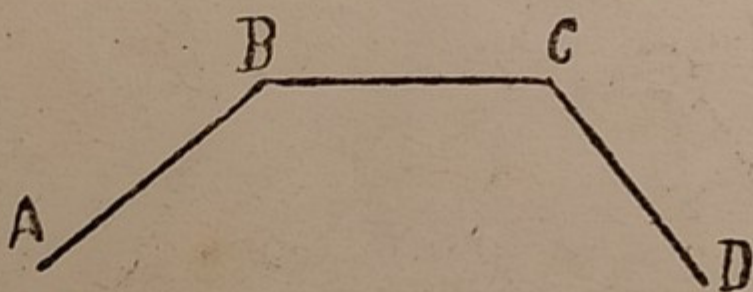



Fig. 42

di un lato qualunque non incontra un altro lato, **concava**

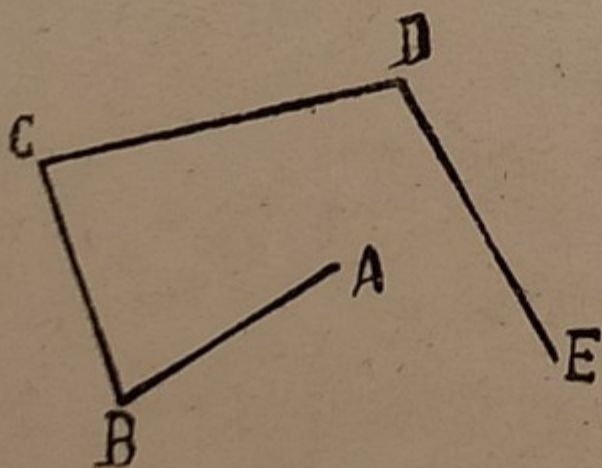
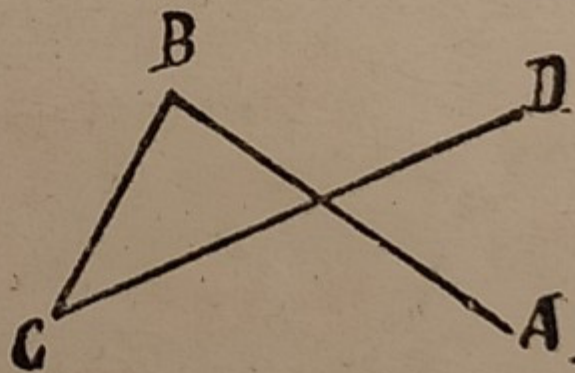



Fig. 43 Fig. 44

(fig. 43) in caso contrario, **intrecciata** (fig. 44) se due lati non consecutivi si tagliano.

Se il termine di una spezzata coincide coll'origine, la spezzata si dice **chiusa**.

48. Si dice poligono la parte di piano limitata da una spezzata chiusa, non intrecciata.

I *lati* della spezzata si dicono **lati** del poligono, i punti comuni ai lati, **vertici** del poligono; gli **angoli** formati da due lati consecutivi, e contenenti il poligono, si dicono **angoli** *interni*, o semplicemente **angoli**, del poligono. Si dice **angolo esterno** di un poligono ogni angolo formato dal prolungamento di un lato col lato successivo.

Diagonale *di un poligono è il segmento che unisce due vertici non consecutivi.*

Il **perimetro** di un poligono è la *somma* dei lati.

Si legge un poligono leggendo successivamente i suoi vertici.

Un poligono si dice **convesso** (fig. 45) se rimane dalla stessa banda rispetto alla retta di ogni lato, **concavo** (fig. 46) se il prolungamento di qualche lato lo divide in due parti.

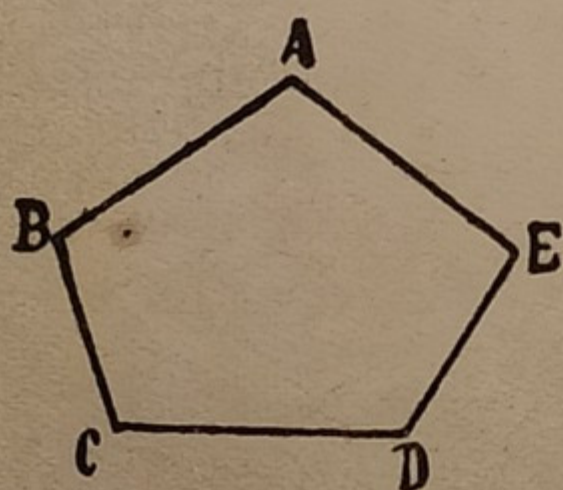
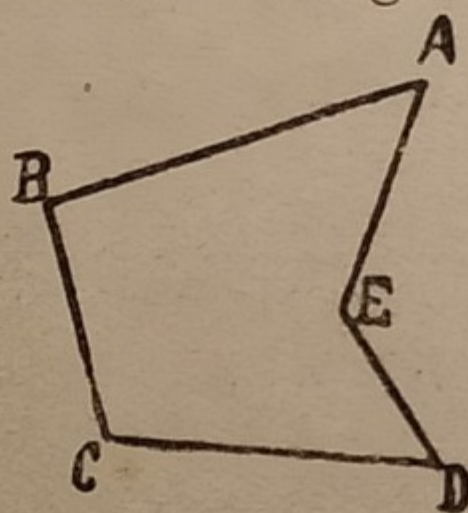



Fig. 45 Fig. 46

Un poligono si dice **triangolo**, **quadrilatero**, **pentagono**, ecc., secondo che ha *tre*, *quattro*, *cinque*, ecc., lati.

Un triangolo ha *tre lati*, *tre vertici* e *tre angoli*: ogni triangolo è convesso e non ha diagonali. I tre lati e i tre angoli si dicono gli **elementi** del triangolo.

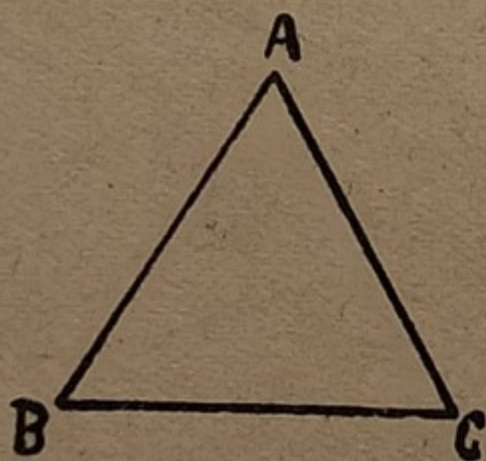
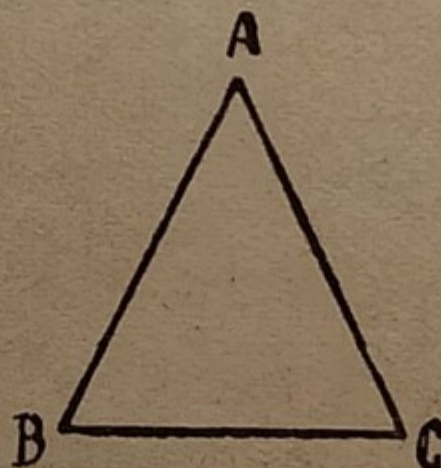
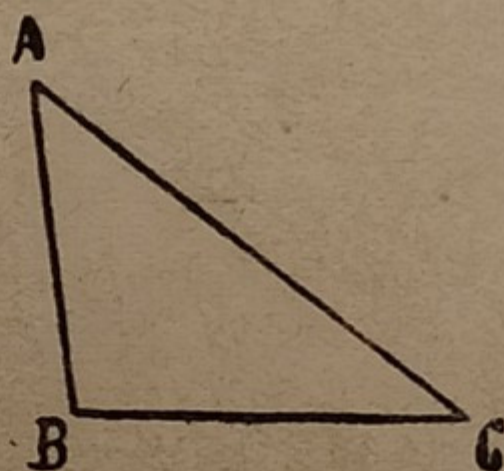



Fig. 47 Fig. 48 Fig. 49

49. Di un triangolo $A\,B\,C$ ogni lato si dice **opposto** all'angolo formato dagli altri due lati e quindi anche opposto al vertice di quest'angolo. Così il lato $\overline{B\,C}$ è opposto all'angolo $B\,\hat{A}\,C$ e al vertice A.

Rispetto ai lati un triangolo è **equilatero** se ha i *tre lati uguali* (fig. 47), **isoscele** se ha *due lati uguali* (fig. 48), **scaleno** se ha i *tre lati disuguali* (fig. 49).

Il segmento *A D* perpendicolare, tirato da un vertice *A* di un triangolo al lato opposto *B C* (fig. 50), o al prolun-

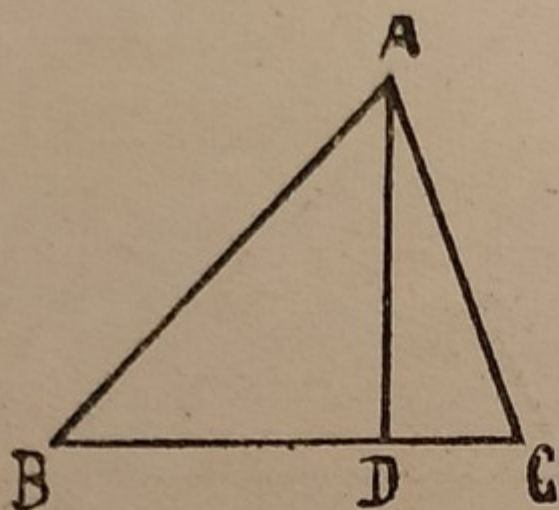



Fig. 50

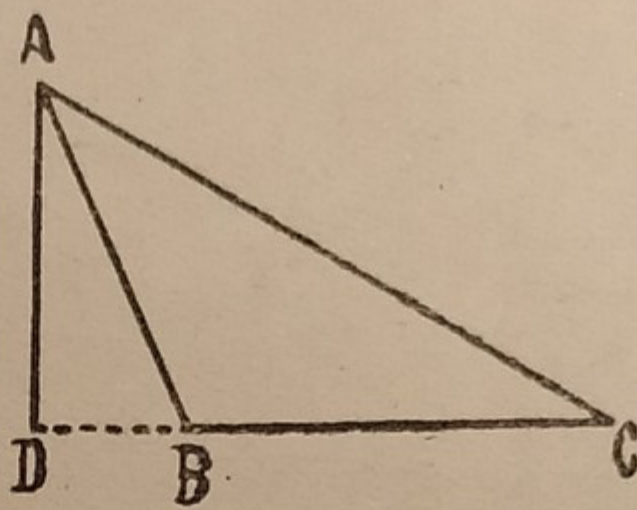



Fig. 51

gamento di questo lato (fig. 51), si dice **altezza** del triangolo relativa a quel lato, che si dice **base** del triangolo.

Un triangolo ha tre altezze.

Il segmento che unisce un vertice di un triangolo col punto di mezzo del lato opposto si dice **mediana** del triangolo relativa a quel lato.

Un triangolo ha tre mediane.

Il segmento di bisettrice di un angolo di un triangolo, compreso fra un vertice e il lato opposto, si dice **bisettrice** del triangolo, relativa a quell'angolo.

Un triangolo ha tre bisettrici.

Criteri di uguaglianza dei triangoli.

50. Due triangoli si dicono uguali, quando si possono disporre in modo che i vertici di uno coincidano rispettivamente coi vertici dell'altro.

In tale caso è evidente che i due triangoli hanno i *tre lati* e i *tre angoli rispettivamente uguali.*

51. *Primo criterio.* **Due triangoli sono uguali se hanno rispettivamente uguali due lati e l'angolo compreso.**

Siano $A B C$ e $A' B' C'$ (fig. 52) due triangoli i quali abbiano

$$A B = A' B', \; A C = A' C', \; B \hat{A} C = B' \hat{A}' C'.$$

Per provare che i due triangoli sono uguali si ricalchi il triangolo $A B C$ e lo si porti su $A' B' C'$, in modo che l'an-

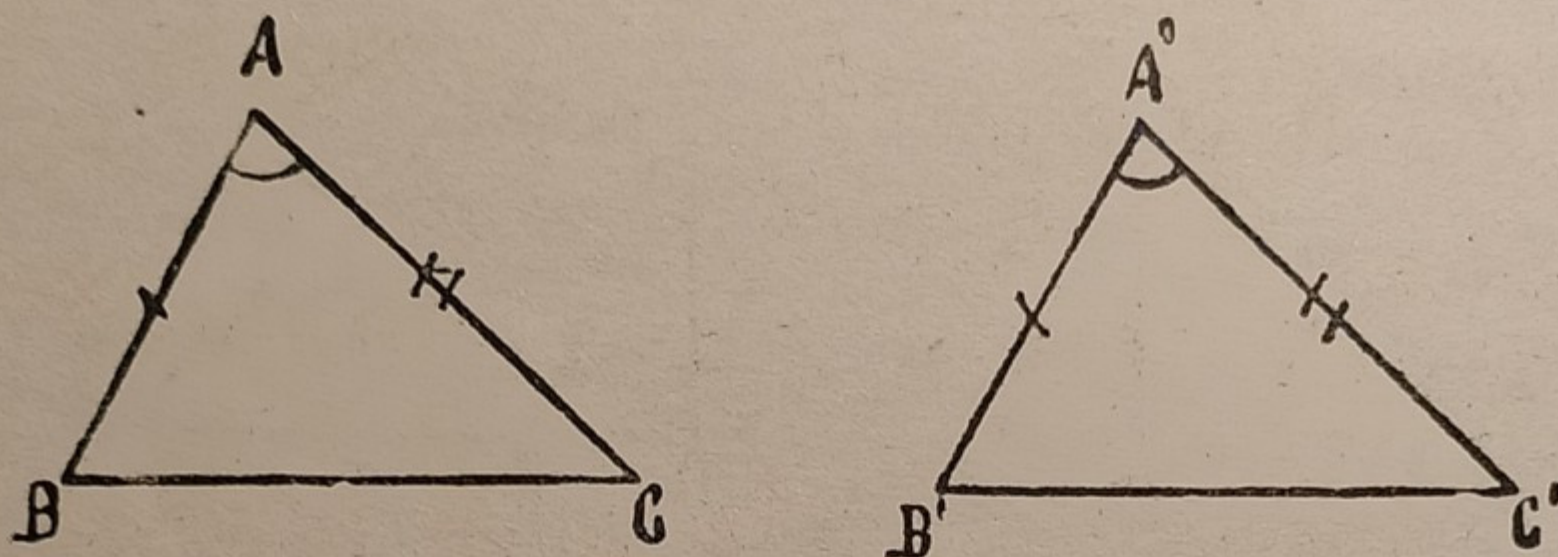



Fig. 52

golo $B \hat{A} C$ coincida coll'angolo $B' \hat{A}' C'$; essendo $A B = A' B'$ il vertice B coinciderà con B', e così essendo $A C = A' C'$ il vertice C coinciderà con C' e quindi i due triangoli risulteranno uguali.

52. *Secondo criterio.* **Due triangoli sono uguali se hanno rispettivamente uguali due angoli e il lato comune.**

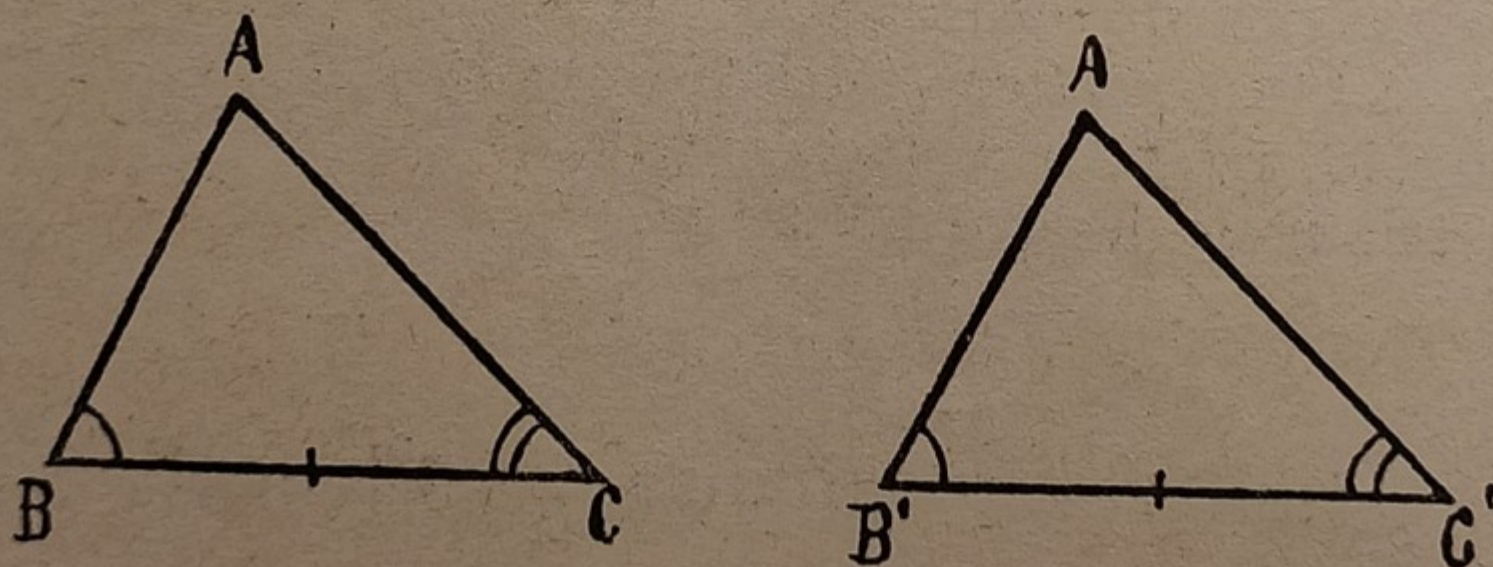



Fig. 53

Siano $A B C$ e $A' B' C'$ (fig. 53) due triangoli i quali abbiano

$$A \hat{B} C = A' \hat{B}' C', \; B \hat{C} A = B' \hat{C}' A', \; B C = B' C'.$$

Per provare che i due triangoli sono uguali si ricalchi il triangolo $A B C$ e lo si porti su $A' B' C'$ in modo che $B C$ coincida con $B' C'$; essendo l'angolo $\hat{B}$ uguale a $\hat{B}'$ il lato

$B\,A$ cadrà su $B'\,A'$, e così essendo l'angolo $\hat{C}$ uguale a $\hat{C}'$ il lato $C\,A$ cadrà su $C'\,A'$; allora il vertice A coinciderà con A' ed i due triangoli risulteranno uguali.

53. *Terzo criterio.* **Due triangoli sono uguali se hanno rispettivamente uguali i tre lati.**

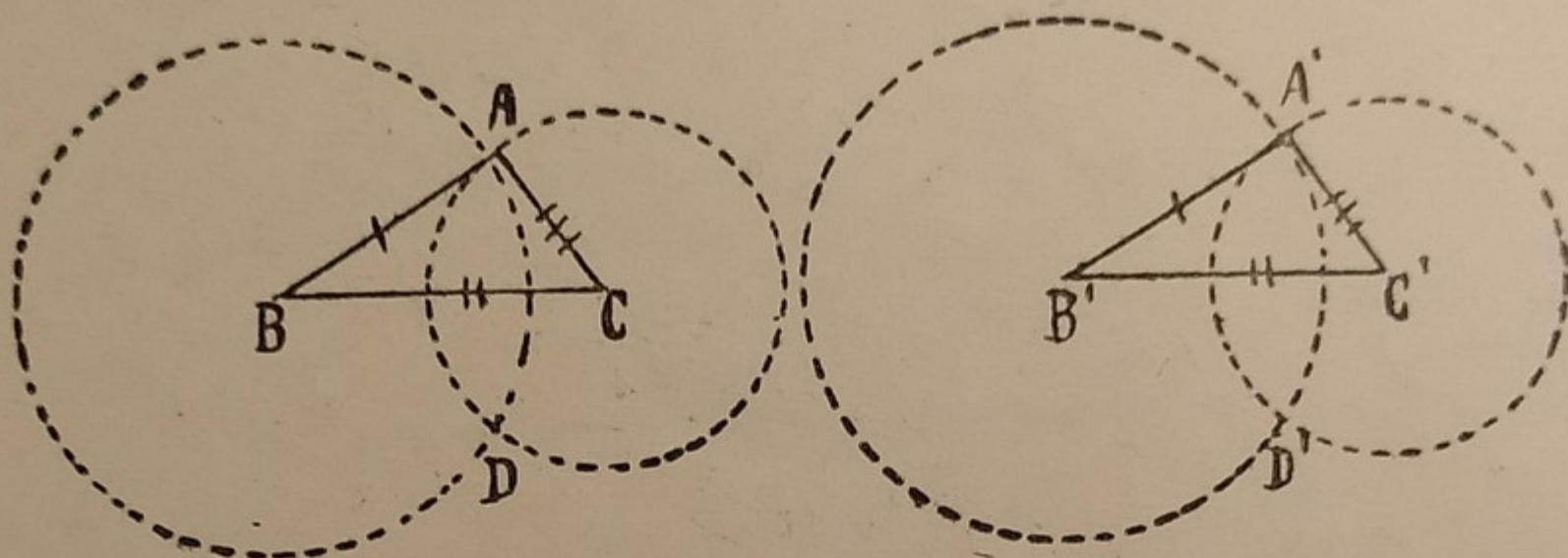



Fig. 54

Siano $A\,B\,C$ e $A'\,B'\,C'$ (fig. 54) due triangoli i quali abbiano

$$A\,B = A'\,B',\ B\,C = B'\,C',\ C\,A = C'\,A'.$$

Per provare che sono uguali descriviamo, nel piano di $A\,B\,C$, due circonferenze di centro B e C e di raggio rispettivo $B\,A$ e $C\,A$. Il vertice A sarà uno dei punti di intersezione delle due circonferenze e l'altro punto di intersezione D è dalla banda opposta di A rispetto a $B\,C$. Ricalchiamo il triangolo $A\,B\,C$ colle due circonferenze descritte e trasportiamo la figura su $A'\,B'\,C'$ in modo che $B\,C$ coincida con $B'\,C'$, uguali per ipotesi, e sia posta dalla stessa parte di $A'\,B'\,C'$, rispetto a $B'\,C'$. Essendo $B'\,A' = B\,A$ il vertice A' si troverà sulla circonferenza ricalcata di centro B e raggio $B\,A$; analogamente, essendo $C'\,A' = C\,A$, il vertice A' dovrà trovarsi sulla stessa circonferenza di centro A e raggio $C\,A$. Quindi il vertice A' dovendo trovarsi sulle due circonferenze dovrà coincidere col punto A. Si conclude che i vertici del triangolo $A\,B\,C$ si possono far coincidere rispettivamente coi vertici di $A'\,B'\,C'$ e quindi i due triangoli sono uguali.

Somma degli angoli di un triangolo.

54. In ogni triangolo la somma dei tre angoli è uguale a un angolo piatto, ossia a due angoli retti.

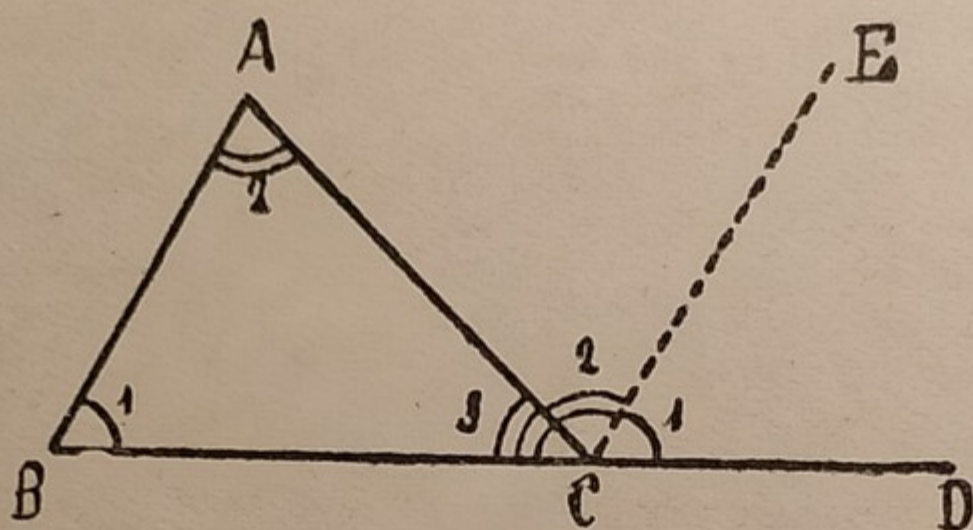



Fig. 55

Dalla figura 55, essendo la retta CE parallela ad AB, si vede facilmente che gli angoli del triangolo, segnati coi numeri 1, 2, 3, danno per somma l'angolo BCD, che è piatto, ed è uguale a due retti.

Sperimentalmente si può verificare questa proprietà ricalcando i due angoli $B\hat{A}C$ ed $A\hat{B}C$ e facendoli coincidere rispettivamente con $A\hat{C}E$ ed $E\hat{C}D$.

55. Un triangolo non può avere più di un angolo retto.

Un triangolo con un angolo retto si dice **triangolo rettangolo** (fig. 56); il lato opposto all'angolo retto si dice **ipotenusa**, gli altri due lati (che formano l'angolo retto) si dicono **cateti**.

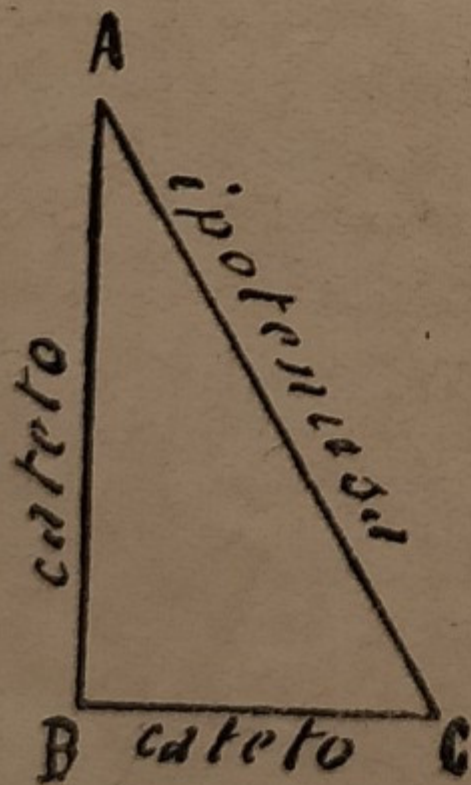



Fig. 56

56. Un triangolo rettangolo ha due angoli acuti che sono *complementari*, cioè *la loro somma è uguale a un angolo retto.*

57. Un triangolo con *un angolo ottuso* si dice **ottusangolo**; i rimanenti due angoli sono acuti.

Un triangolo avente i *tre angoli acuti* si dice **acutangolo**.

Relazione fra i lati e gli angoli opposti di un triangolo.

58. Un triangolo con due lati uguali sappiamo che si dice *isoscele;* i due lati uguali si dicono propriamente *lati* del triangolo, il terzo lato si dice *base.*

L'angolo formato dai due lati uguali si dice *angolo al vertice* del triangolo, gli altri due si dicono *angoli alla base* del triangolo.

59. In ogni triangolo isoscele gli angoli alla base sono fra loro uguali.

Sia $A B C$ un triangolo isoscele (fig. 57), disegnato su carta da ricalco, e sia $B A = B C$. Se si unisce il vertice B col punto di mezzo H della base e si piega la figura lungo la $B H$ il punto B rimane fisso, A va a coincidere con C, il lato $B A$ con $B C$. Quindi l'angolo $B \hat{A} C$ coinciderà coll'angolo $B \hat{C} A$.

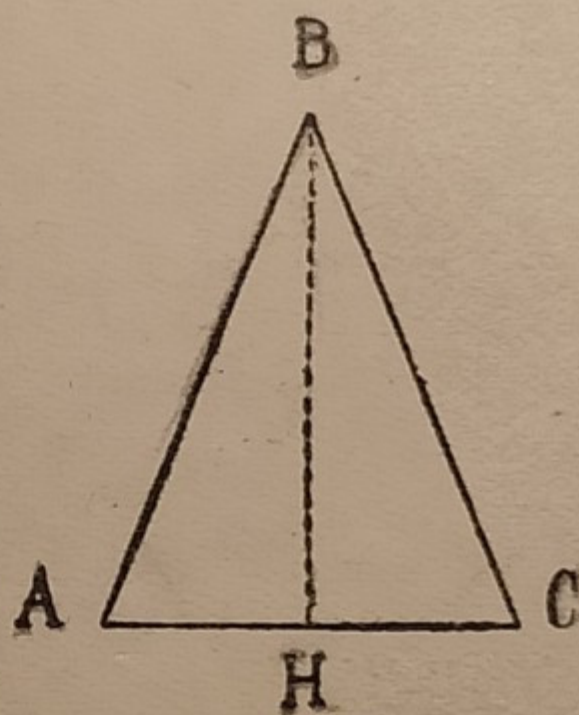



Fig. 57

60. *Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono acuti.*

Un triangolo equilatero è equiangolo.

Nel triangolo isoscele $A B C$, la *mediana* $B H$ è *bisettrice* dell'angolo al vertice $A B C$ ed è perpendicolare alla base, cioè è *altezza* del triangolo.

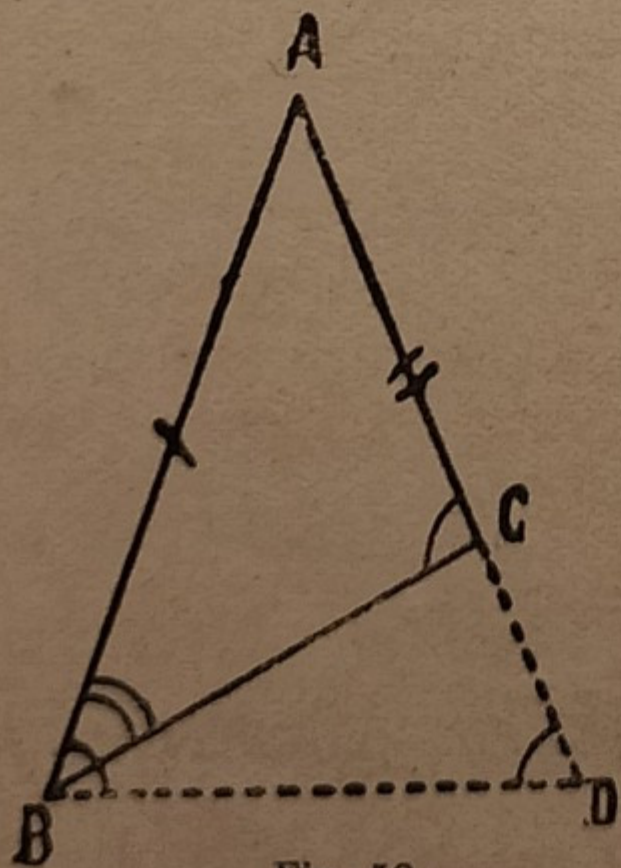



Fig. 58

61. Se due lati di un triangolo sono disuguali l'angolo opposto al lato maggiore è maggiore dell'angolo opposto all'altro lato.

Sia $A B C$ un triangolo (fig. 58) in cui il lato $A B$ è maggiore di $A C$. L'angolo $A \hat{C} B$, opposto al lato maggiore $A B$, è maggiore dell'angolo $A \hat{B} C$ opposto all'altro lato $A C$.

Ciò si può verificare ricalcando i due angoli e sovrapponendoli.

62. Si verifica pure sperimentalmente:

Se due angoli di un triangolo sono uguali fra loro, i lati opposti sono uguali fra loro.

Un triangolo equiangolo è equilatero.

Se due angoli di un triangolo sono disuguali, il lato opposto all'angolo maggiore è maggiore del lato opposto all'altro angolo.

63. Quindi:

In un triangolo rettangolo il lato maggiore è l'ipotenusa.

In un triangolo ottusangolo il lato maggiore è quello che sta opposto all'angolo ottuso.

Quadrilateri.

64. Si dice **quadrilatero** un poligono avente *quattro lati.*

In un quadrilatero due lati si dicono opposti, se non hanno nessun vertice comune; *due vertici* si dicono *opposti* se *non sono consecutivi.* Nel quadrilatero $ABCD$ (fig. 59) sono *opposti* i lati AB e CD, BC e AD, sono *opposti* i vertici A e C, B e D.

In un quadrilatero si dicono opposti due angoli i cui vertici sono opposti.

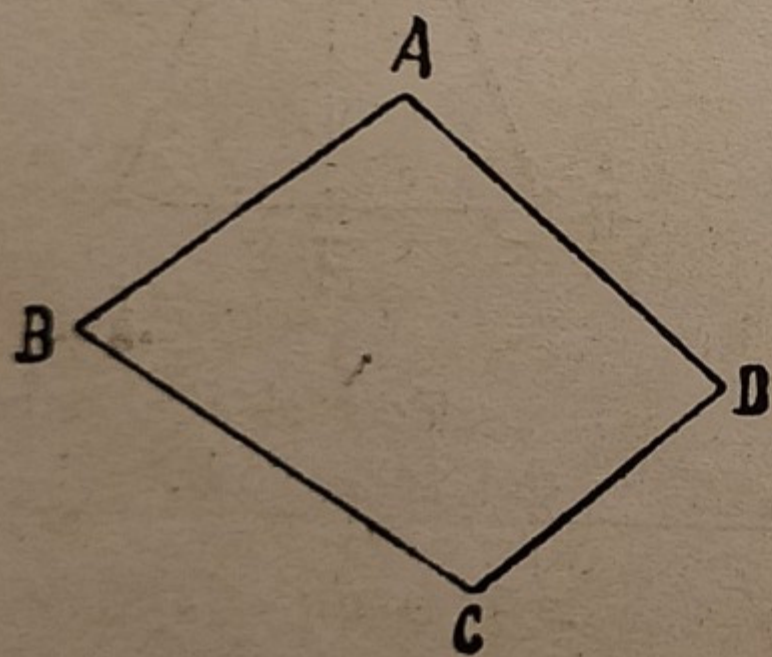



Fig. 59

65. Il **trapezio** è un quadrilatero che ha solo due lati *opposti paralleli* (fig. 60). I due lati paralleli si dicono **basi** del trapezio, la loro distanza **altezza.**

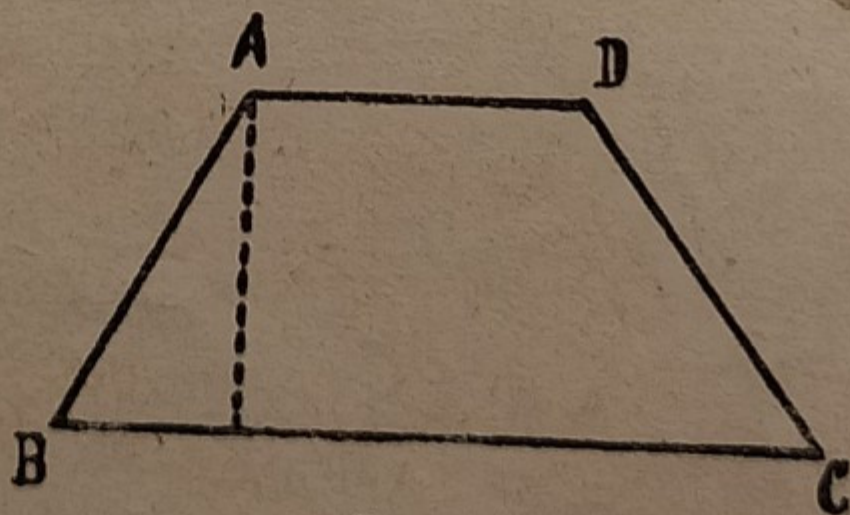



Fig. 60

Il trapezio si dice **isoscele** *se i due lati non paralleli sono uguali.*

66. *Un quadrilatero si dice* **parallelogramma** *se i lati opposti sono paralleli.*

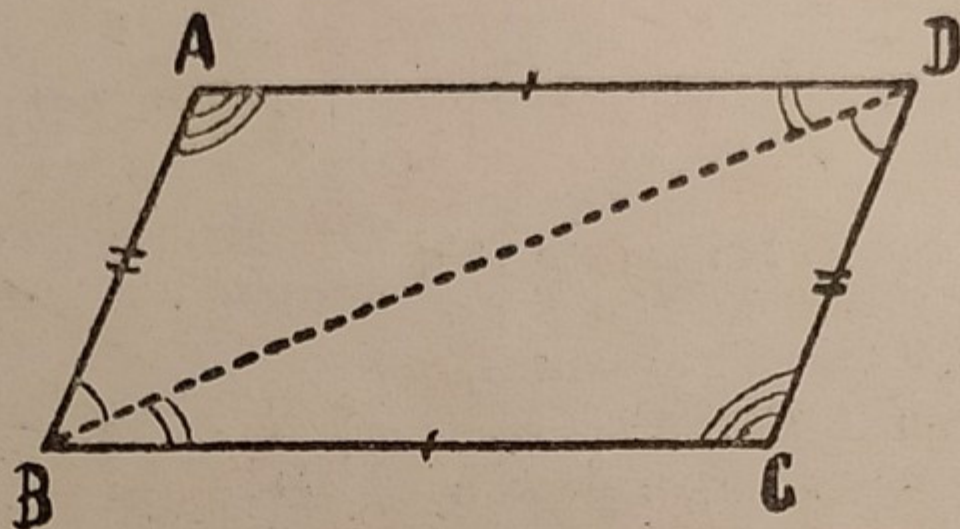



Fig. 61

Il quadrilatero $A\,B\,C\,D$ (fig. 61) è un parallelogramma, essendo $A\,B$ parallelo a $C\,D$ e $A\,D$ parallelo a $B\,C$.

67. *In un parallelogramma:*

1.° **Ogni diagonale lo divide in due triangoli uguali.**

2.° **I lati opposti sono uguali.**

3.° **Gli angoli opposti sono uguali.**

4.° **Le due diagonali si dividono scambievolmente in parti uguali.**

Queste proprietà si dimostrano sperimentalmente disegnando la figura su carta da ricalco, indi capovolgendola e facendola coincidere colla prima figura.

Rettangolo, rombo, quadrato.

68. Il rettangolo è un quadrilatero che ha gli angoli retti.

Un foglio di carta, i vetri di una finestra, la cornice di un quadro, ecc., hanno la forma di rettangoli.

Un parallelogramma è rettangolo se ha un angolo retto.

69. Nel rettangolo le diagonali sono uguali.

Basta ricopiare il rettangolo $A\,B\,C\,D$ (fig. 62) su carta da ricalco, capovolgerlo e farlo coincidere colla prima posizione; si vede che la diagonale $A\,C$ coincide con $B\,D$.

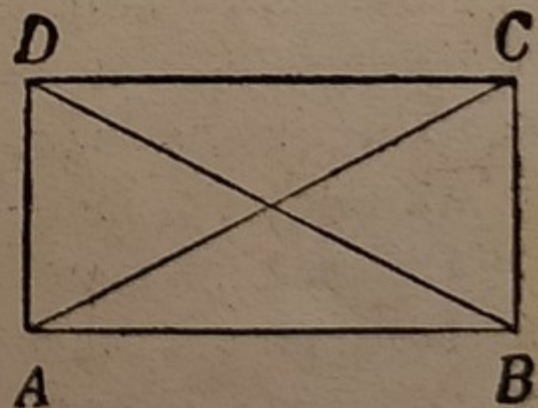



Fig. 62

70. Il rombo è un quadrilatero che ha i lati uguali.

Un parallelogramma è rombo se ha due lati consecutivi uguali.

71. Le diagonali di un rombo sono perpendicolari fra loro.

Se si piega la fig. 63 lungo la AC il punto D si può far coincidere con B perchè $OD = OB$, AD coinciderà con AB e l'angolo $A\hat{O}D$ con $A\hat{O}B$. Ma siccome questi due angoli sono adiacenti ciascuno è retto.

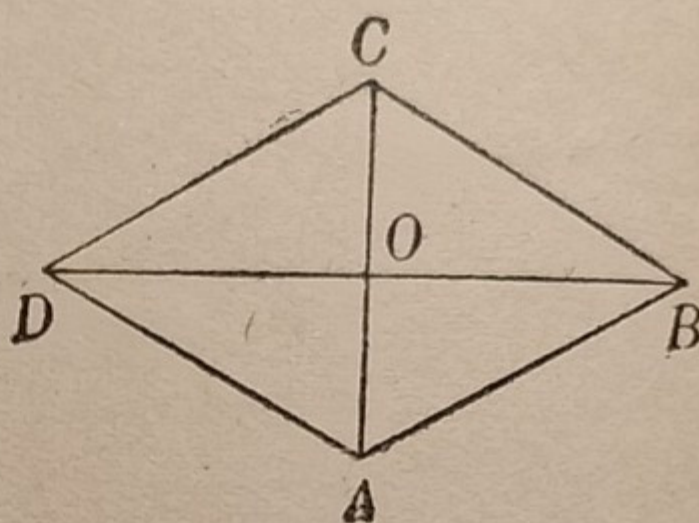



Fig. 63

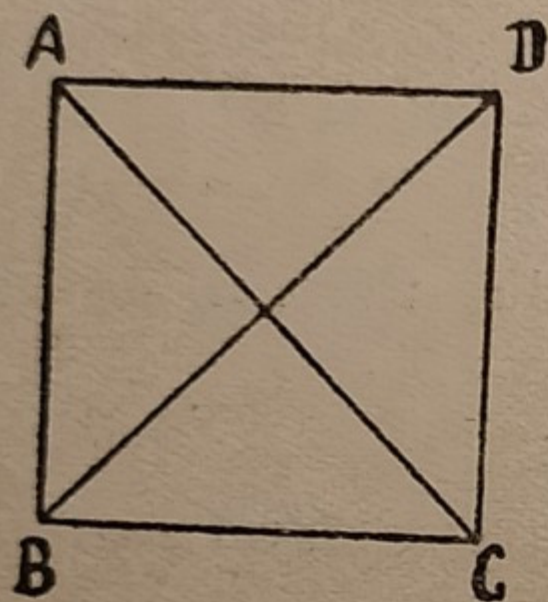



Fig. 64

72. Il quadrato è un quadrilatero che ha gli angoli retti ed i lati uguali.

Il quadrato è rettangolo e rombo: ne segue che le sue diagonali sono uguali e perpendicolari fra loro.

ESERCIZI.

1. Dati tre punti A, B, C, non posti in linea retta, in quante parti dividono il piano, le tre rette AB, BC, CA?
2. Disegnare, a mano libera, una spezzata convessa, una concava, una intrecciata.
3. Disegnare a mano libera:
   1.° Un triangolo scaleno.
   2.° Un triangolo isoscele.
   3.° Un triangolo equilatero.
4. Disegnare, a mano libera, un triangolo e tirare le tre mediane.
5. Disegnare, a mano libera, un triangolo e tirare le tre bisettrici.
6. Disegnare, a mano libera, un triangolo e tirare le tre altezze.
7. Disegnare, a mano libera, un triangolo rettangolo e tirare le tre altezze.
8. Disegnare, a mano libera, un pentagono e un esagono.
9. Disegnare, a mano libera, due triangoli uguali.

10. Quand'è che due triangoli sono uguali?

11. In un triangolo equilatero, ogni angolo che parte è di un angolo piatto, oppure di un angolo retto?

12. Disegnare, a mano libera, due quadrilateri uguali.

13. Disegnare a mano libera:

1.° Un trapezio qualunque.
2.° Un trapezio isoscele.
3.° Un parallelogramma.
4.° Un rettangolo.
5.° Un rombo.
6.° Un quadrato.

14. Quale differenza c'è fra il parallelogramma e il rettangolo?

15. Quale differenza c'è fra il parallelogramma e il rombo?

16. Quale differenza c'è fra il rettangolo e il quadrato?

17. In un triangolo rettangolo il segmento che unisce il vertice dell'angolo retto col punto di mezzo dell'ipotenusa è la metà dell'ipotenusa. (*Basta formare il rettangolo avente per lati i cateti del triangolo*).

CAPITOLO VII.

Circonferenze e circoli.

73. Def. *La* **circonferenza** (1) *è una linea chiusa i cui punti sono tutti equidistanti da un punto O che si dice* **centro.**

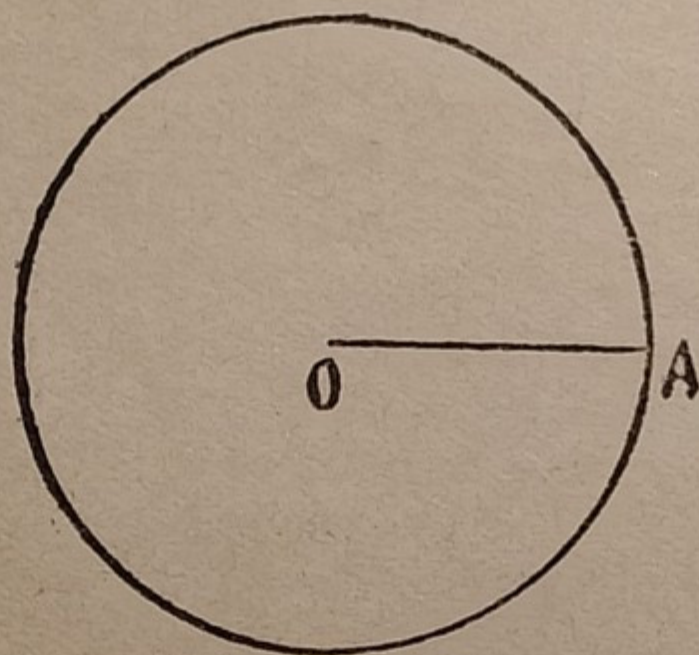



Fig. 65

Il segmento OA (fig. 65) che unisce un punto qualunque della circonferenza col centro si dice **raggio.**

In una circonferenza si ha un numero infinito di raggi, tutti uguali tra loro.

Il *compasso* è lo strumento, noto specialmente nel disegno, col quale si descrive comunemente la circonferenza.

74. Il segmento CD (fig. 66) che unisce due punti qualunque della circonferenza si dice **corda.**

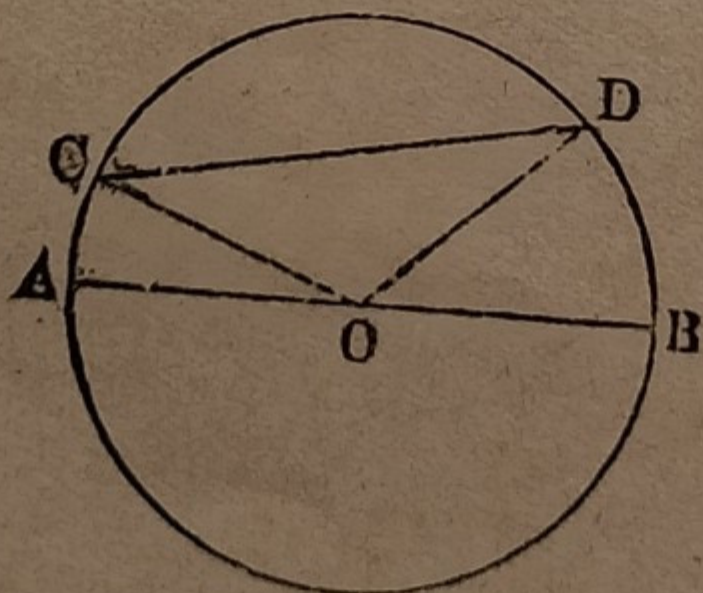



Fig. 66

(1) Dal latino *circumferèntia* (*circum* e *fèrre*: portar intorno).

Ogni corda passante per il centro si dice **diametro**.

In una circonferenza si ha *un numero infinito di diametri, tutti uguali tra loro.*

Due circonferenze sono uguali se hanno raggi uguali.

75. Si dice **arco** $C\,D$ (fig. 66) la parte di circonferenza limitata da due punti C e D. I due punti C e D si dicono **estremi** dell'arco, C **origine**, D **termine**.

La corda $C\,D$ si dice che è sottesa dall'arco $C\,D$, oppure si dice che l'arco $C\,D$ *sottende* la corda $C\,D$.

76. Ogni diametro divide la circonferenza in due *parti uguali*, ciascuna delle quali si dice **semicirconferenza**.

77. Un punto A del piano di una circonferenza O (fig. 67) si dice **interno** alla circonferenza se la distanza $O\,A$ dal

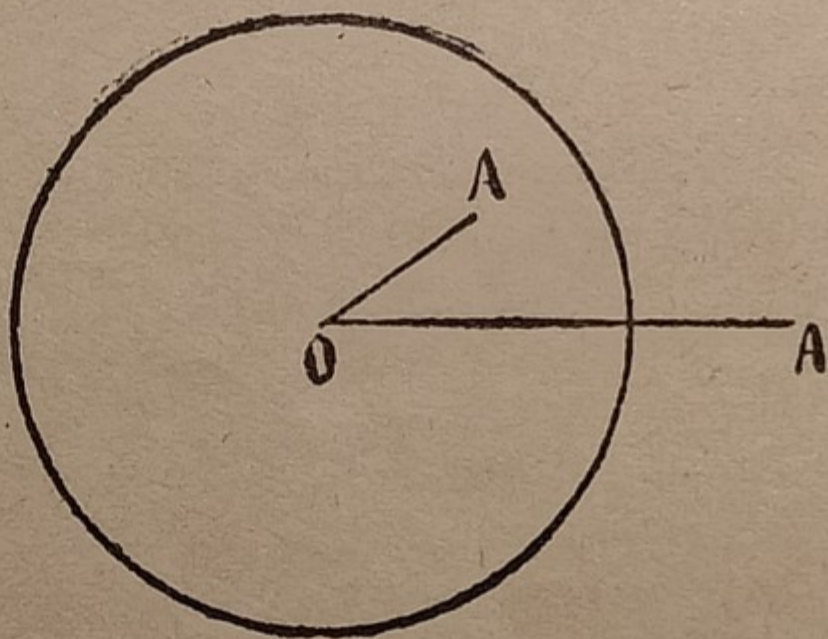



Fig. 67

centro è *minore del raggio*, si dice **esterno** se $O\,A$ è *maggiore del raggio*.

La *parte di piano* costituita dai *punti interni alla circonferenza e dai punti della circonferenza* si dice **circolo** (1), o **cerchio**.

Il centro, il raggio e il diametro della circonferenza si dicono *centro, raggio e diametro* del circolo.

Osservazione. — La circonferenza è una *linea*, il circolo è la *parte di piano* limitata dalla circonferenza.

Due circoli sono uguali se hanno raggi uguali.

---

(1) Dal latino *circulus*: *cerchio* è sincope di *circolo*.

78. Ogni diametro divide il circolo in *due parti uguali*, ciascuna delle quali si dice **semicircolo**.

79. La parte di circolo limitata da due raggi OA e OB

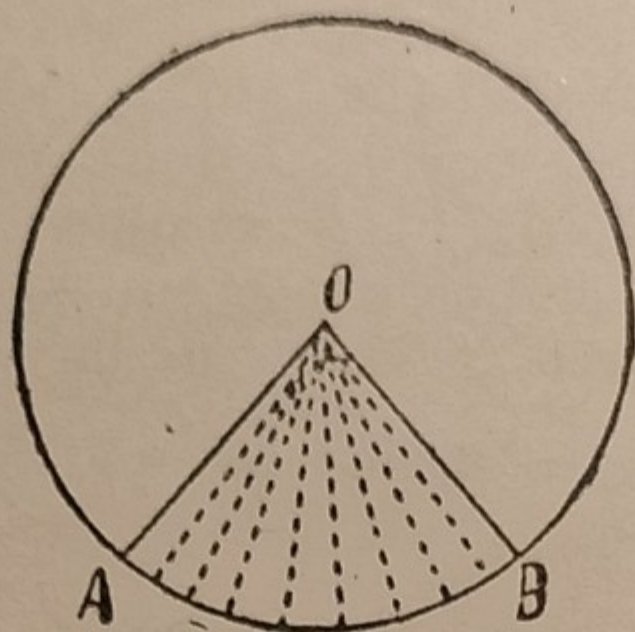



Fig. 68

e dall'arco AB (fig. 68) si dice **settore circolare**, o semplicemente **settore**.

L'angolo $A\hat{O}B$ avente il vertice nel centro del circolo si dice **angolo al centro**.

L'angolo al centro $A\hat{O}B$ corrisponde all'arco AB ed al settore AOB.

L'arco AB ed il settore AOB corrispondono all'angolo $A\hat{O}B$.

Osservazione. — L'arco AB ed il settore AOB si intendono corrispondenti all'*angolo convesso* $A\hat{O}B$. Il *semicircolo* corrisponde ad un *angolo piatto*.

80. Confronto di archi e settori. Come per i *segmenti* e per gli *angoli* si possono dare, per gli *archi* ed i *settori*, i concetti di *uguaglianza* e *disuguaglianza*, purchè gli archi ed i settori appartengano a circonferenze ed a circoli uguali.

Per verificare se due archi AB, $A'B'$, appartenenti a circonferenze uguali, o a una stessa circonferenza (fig. 69), sono *uguali*, supposte le circonferenze disegnate su carta da ricalco, si fanno coincidere i centri O ed O', e le origini A ed A', e si dispongono in modo che i due archi abbiano il *medesimo verso*. Se gli estremi B e B' coincidono, i due archi sono uguali. Se B' cade fra A e B l'arco AB è *maggiore* di $A'B'$, se cade fuori di AB l'arco AB è *minore* di $A'B'$.

erageno

Per i settori si fanno coincidere gli angoli al centro corrispondenti; secondo che questi sono *uguali* o *disuguali*,

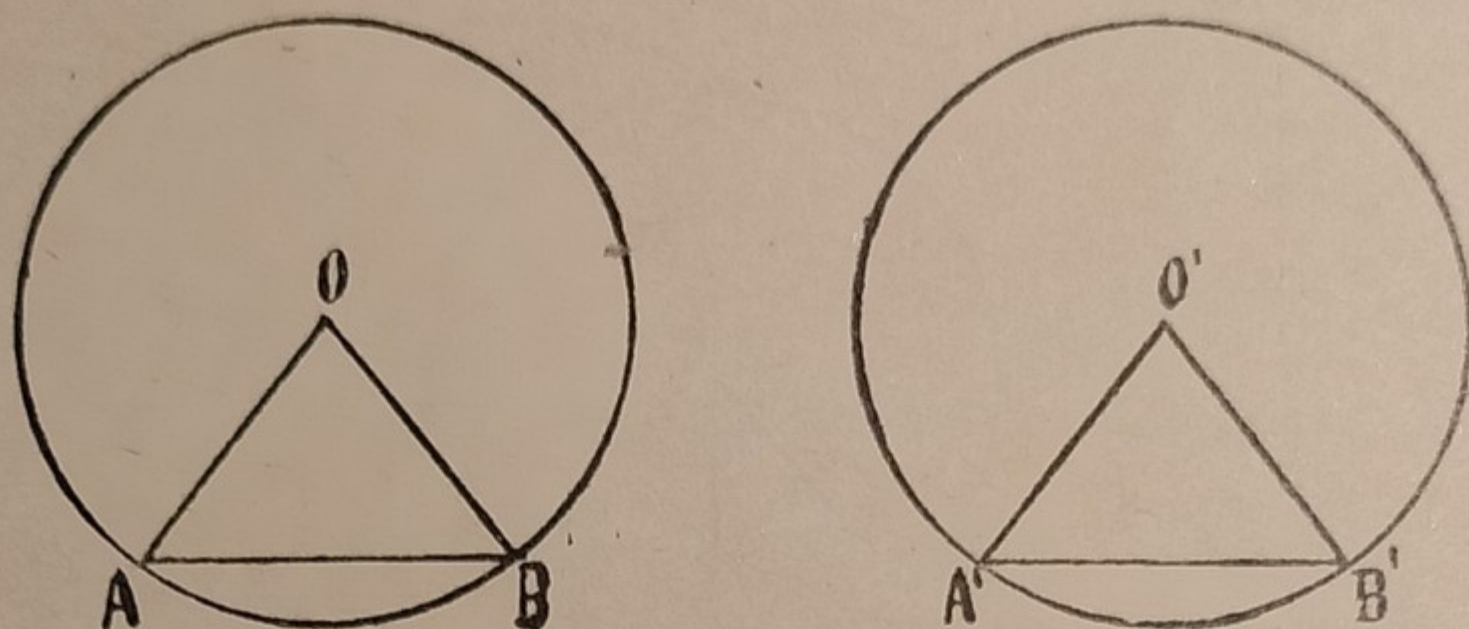



Fig. 69

anche i settori saranno *uguali* o *disuguali* nello stesso senso.

Ne deriva:

In circonferenze, o circoli, uguali ad archi o settori uguali corrispondono angoli al centro uguali, ad archi o settori disuguali corrispondono angoli al centro disuguali nel medesimo senso, e reciprocamente.

81. Somma e differenza di archi e settori. I concetti di somma e differenza di archi e settori appartenenti a circonferenze, o a circoli uguali, si danno seguendo gli stessi criteri della somma e differenza di segmenti ed angoli.

82. Una retta e una circonferenza possono avere *due punti in comune, un punto solo* o *nessuno.*

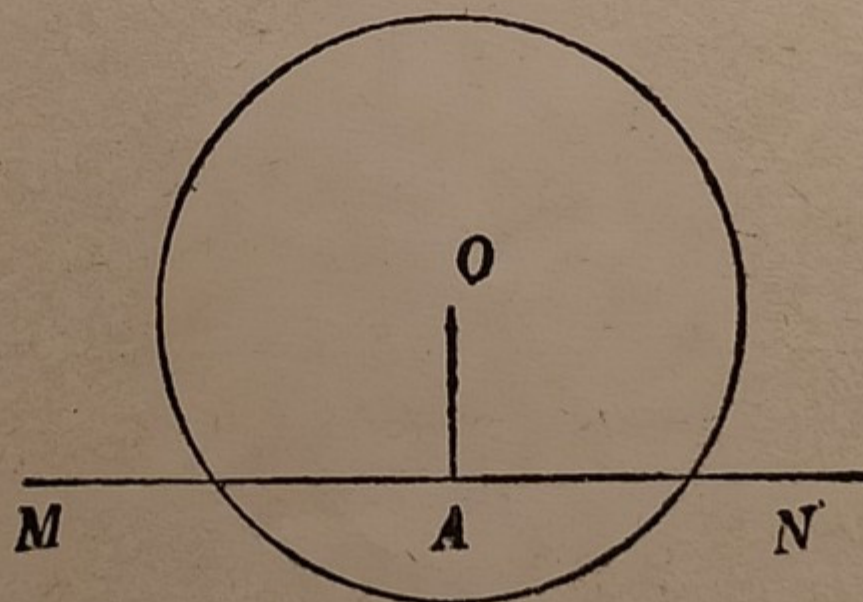



Fig. 70

La retta MN (fig. 70), ha due punti comuni colla circonferenza O quando la *sua distanza* OA *dal centro è minore del raggio.*

La retta MN si dice **segante** la circonferenza.

83. La retta $M N$ (figura 71) ha *un punto solo* comune colla circonferenza O, quando *la sua distanza $O A$ dal centro è uguale al raggio.*

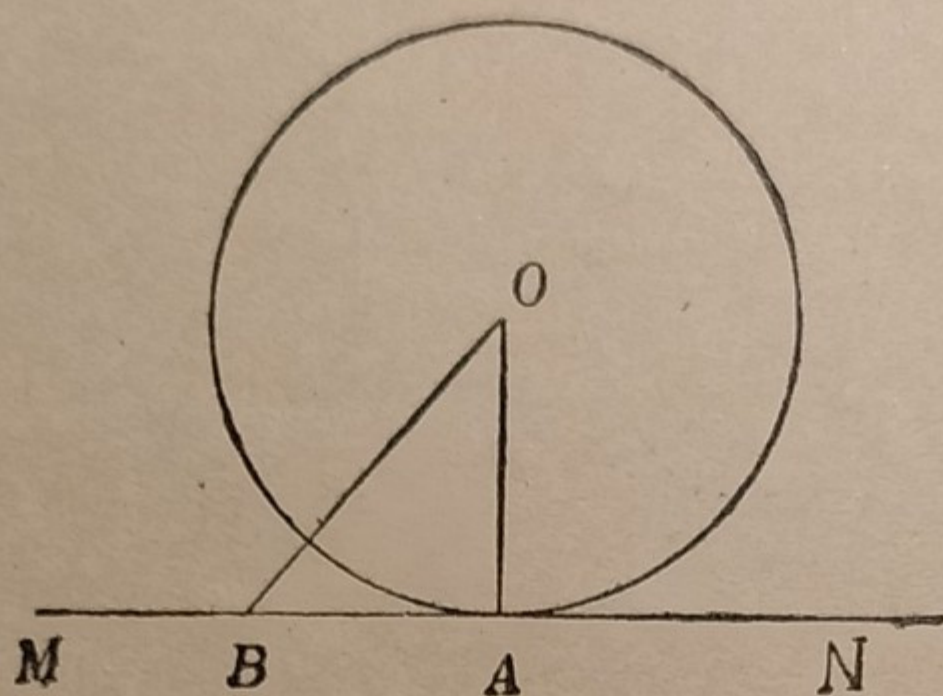



Fig. 71

Le retta $M N$ si dice **tangente** la circonferenza; il punto comune si dice **punto di contatto**, o **punto di tangenza.**

Il raggio $O A$ è perpendicolare alla tangente $M N$ nel punto di contatto A.

84. La retta $M N$ (fig. 72) non ha nessun punto comune

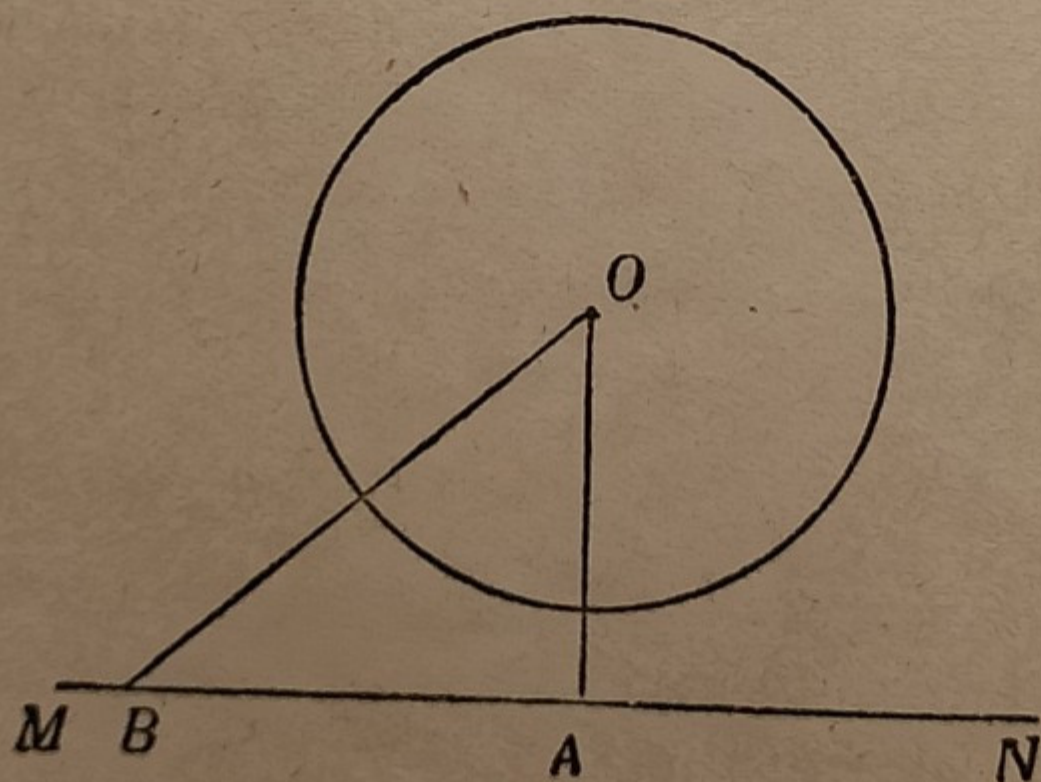



Fig. 72

colla circonferenza O quando *la sua distanza $O A$ dal centro è maggiore del raggio.*

La retta $M N$ si dice **esterna** alla circonferenza.

ESERCIZI.

1. Servendosi di una moneta disegnare una circonferenza e segnare a vista il centro.

2. Disegnare, a mano libera, parecchie circonferenze, e segnare il centro a vista.

3. Disegnare, a mano libera, una circonferenza e tirare un raggio, una corda e un diametro.

4. Disegnare, a mano libera, una circonferenza e segnare un arco e un settore circolare.

5. Disegnare, a mano libera, una circonferenza; indi tirare la tangente in un punto di essa.

6. Disegnare, a mano libera, una circonferenza, indi tirare una retta segante e una retta esterna alla circonferenza.

7. Disegnare due circonferenze che non abbiano nessun punto comune e ciascuna sia esterna all'altra.

8. Disegnare due circonferenze che non abbiano nessun punto comune e una sia interna all'altra.

9. Disegnare due circonferenze che abbiano un punto comune e ciascuna sia esterna all'altra.

10. Disegnare due circonferenze che abbiano un punto comune e una sia interna all'altra.

11. Disegnare due circonferenze che abbiano due punti comuni.

12. Che succede se due circonferenze hanno tre punti comuni?

13. Qual'è la *massima* corda che si può condurre da un punto interno ad ad una circonferenza? Qual'è la minima?

14. Se due corde di una circonferenza hanno dal centro distanze uguali, sono uguali?

15. Se due corde hanno dal centro distanze disuguali, qual'è la maggiore?

16. Da un punto di una circonferenza come si conduce la tangente alla circonferenza?

17. Da un punto interno ad una circonferenza quante tangenti si possono condurre alla circonferenza?

18. Da un punto esterno ad una circonferenza, quante tangenti si possono condurre alla circonferenza?

CAPITOLO VIII.

Misura dei segmenti, degli angoli e degli archi.

Misura dei segmenti.

85. Misurare un segmento a significa confrontarlo con un altro segmento b e trovare quante volte b, oppure una sua parte aliquota sia contenuta in a.

Se b è contenuto esattamente *una volta* in a, sarà:

$$a = b,$$

Se vi è contenuto 2, 3, 4, ... volte, allora:

$$a = 2\,b.\ a = 3\,b,\ a = 4\,b, \ldots$$

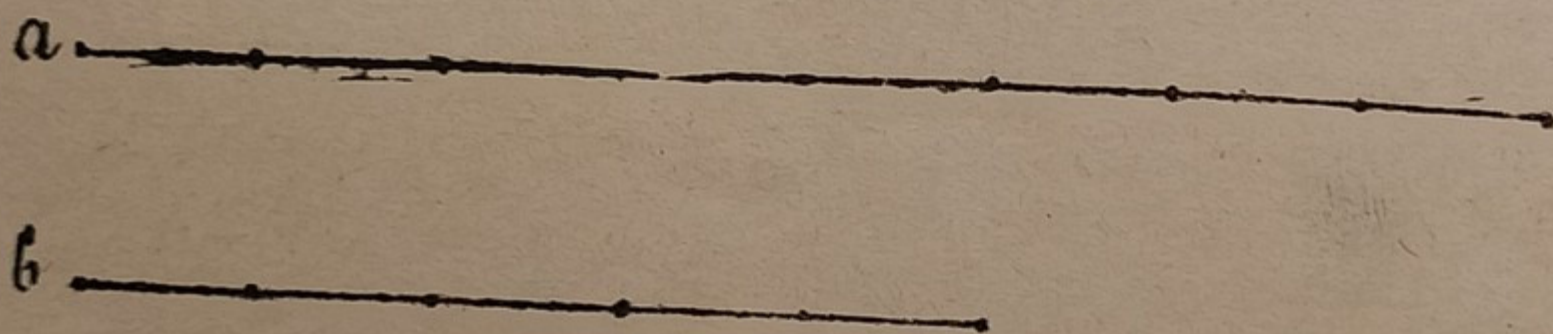



Fig. 73

Se a non contiene esattamente b, ma contiene per es. 8 *volte la sua quinta parte* (fig. 73), allora

$$a = \frac{8}{5}\,b.$$

che si legge: *a uguale a otto quinti di b.*

I numeri 2, 3, 4, $\frac{8}{5}$ ... si dicono **misura** *del segmento a rispetto a b.*

Se $a = b$ la *misura* di a rispetto a b è 1.

86. Nella pratica l'unità di misura dei segmenti è il **metro (m)**, diviso in *10 decimetri* **(dm)**, in *100 centimetri*

(**cm**), in *1000 millimetri* (**mm**). Il metro venne determinato misurando il meridiano passante per Parigi e venne assunto come unità fondamentale del sistema metrico decimale.

87. Per misurare la lunghezza di una strada, la distanza fra due città, ecc., si usano altre unità: il *decametro* (**dam**), che equivale a 10 m., l'*ettometro* (**hm**), che equivale a 100 m., il *chilometro* (**km**) che equivale a 1000 m., il *miriametro* (**Mm**), che equivale a 10000 m.

88. Per il disegno si usa comunemente il *doppio-deci-*

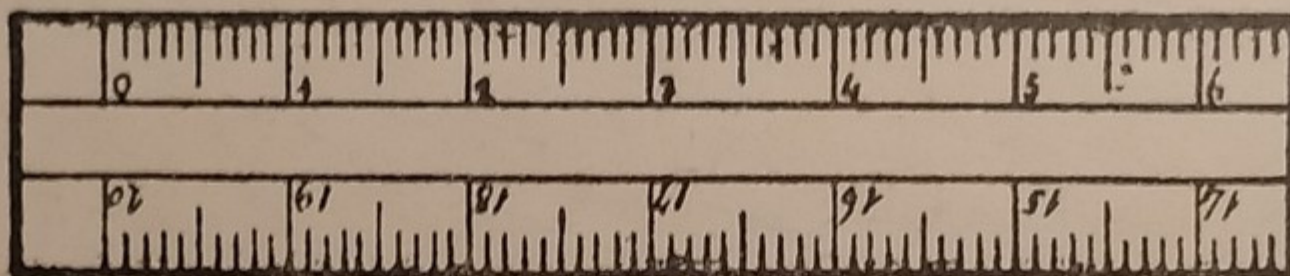



Fig. 74

metro (fig. 74), che è un piccolo regolo, i cui due spigoli sono divisi in 20 parti uguali numerati da 0 a 20; ciascuna parte è 1 cm., diviso in 10 mm.

Per misurare un segmento $A B$ si fa coincidere lo spigolo del doppio decimetro col segmento in modo che lo 0 coincida con A. Se l'estremo B coincide, per es. colla 25ª divisione, la *misura di* $A B$ *è 25 mm.;* se B si trova fra la 25ª e la 26ª divisione allora si dice che la *misura di* $A B$ è *25 mm., a meno di 1 mm. per difetto*, oppure *26 mm. a meno di 1 mm. per eccesso.*

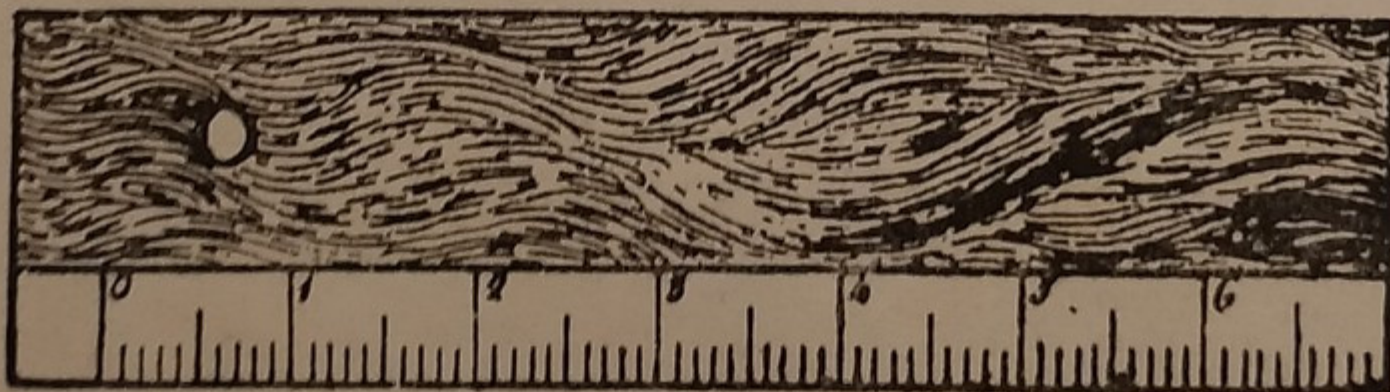



Fig. 75

Per il disegno si usa pure la *riga graduata* (fig. 75) avente un solo spigolo diviso in 50 o 60 parti uguali (*cm*); ciascuna di queste parti è divisa in 10 parti uguali (*mm*).

L'uso della riga è analogo a quello del doppio decimetro.

88.* Nella pratica si usano pure altri strumenti per misurare le lunghezze. Così il mercante usa un'asta di legno lunga *1 m.*, divisa in *decimetri* e *centimetri;* il falegname usa un metro pieghevole, formato da 10 regoletti, ciascuno di *1 dm.;* il sarto usa un nastro lungo 150 cm.; il geometra usa *un decametro*, a forma di nastro, che si avvolge per comodità in una scatola attorno ad un pernio.

Misura degli angoli e degli archi.

89. Sappiamo che *in una stessa circonferenza ad angoli al centro uguali corrispondono archi uguali.*

Essendo gli angoli $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}E$ .... uguali (fig. 76), gli archi AB, BC, CD, DE,... saranno u-

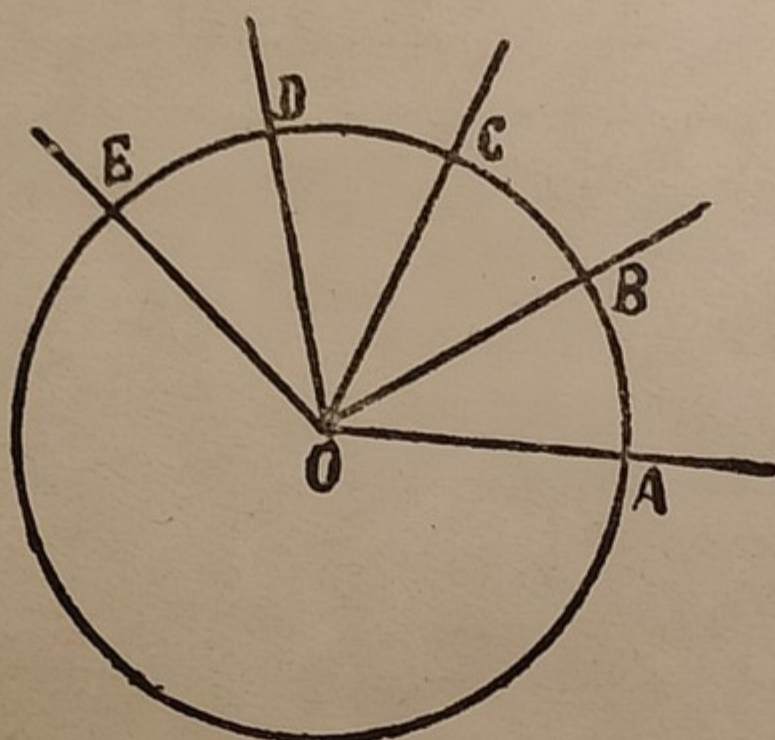



Fig. 76

guali. Allora gli archi AC, AD, AE, ... *somme* di **2**, **3**, **4**, .., archi uguali ad AB si dicono *multipli* di AB secondo i numeri 2, 3, 4, ... e l'arco AB si dirà *sottomultiplo* rispettivamente di AC, AD, AE, ... secondo i numeri 2, 3, 4, ...

90. L'unità principale di misura degli angoli è l'**angolo retto**. La 90ª parte dell'angolo retto si dice **grado**; un angolo di *un grado* si scrive 1°.

La 60ª parte del grado si dice **primo**; un angolo di *un primo* si scrive $1'$.

La 60ª parte del primo si dice **secondo**; un angolo di *un secondo* si scrive $1''$.

Dopo i secondi si considerano i *decimi*, i *centesimi*, ... dei *secondi*.

La misura di un angolo di

12 *gradi*, 20 *primi*, 48 *secondi*

si indica brevemente:

$12^{\circ}\ 20'\ 48''$.

La misura di un angolo si dice anche **ampiezza** dell'angolo.

La misura dell'angolo retto è di 90 gradi.

La misura dell'angolo piatto è di 180 gradi.

La misura dell'angolo giro è di 360 gradi.

91. L'unità principale di misura degli archi è il *quadrante* della circonferenza a cui appartengono gli archi.

Se si unisce il centro di una circonferenza coi punti di divisione di un arco, l'angolo al centro corrispondente viene diviso nello stesso numero di parti uguali.

Quindi ad un angolo al centro espresso in *gradi*, *primi* e *secondi* corrisponde un arco le cui parti corrispondenti si dicono pure *gradi*, *primi* e *secondi*.

Le misure degli archi si esprimono come quelle degli angoli.

Il quadrante, che corrisponde ad un angolo retto, misura 90 gradi.

La semicirconferenza misura 180 gradi.

La circonferenza misura 360 gradi.

92. La misura degli archi, e quindi degli angoli, spe

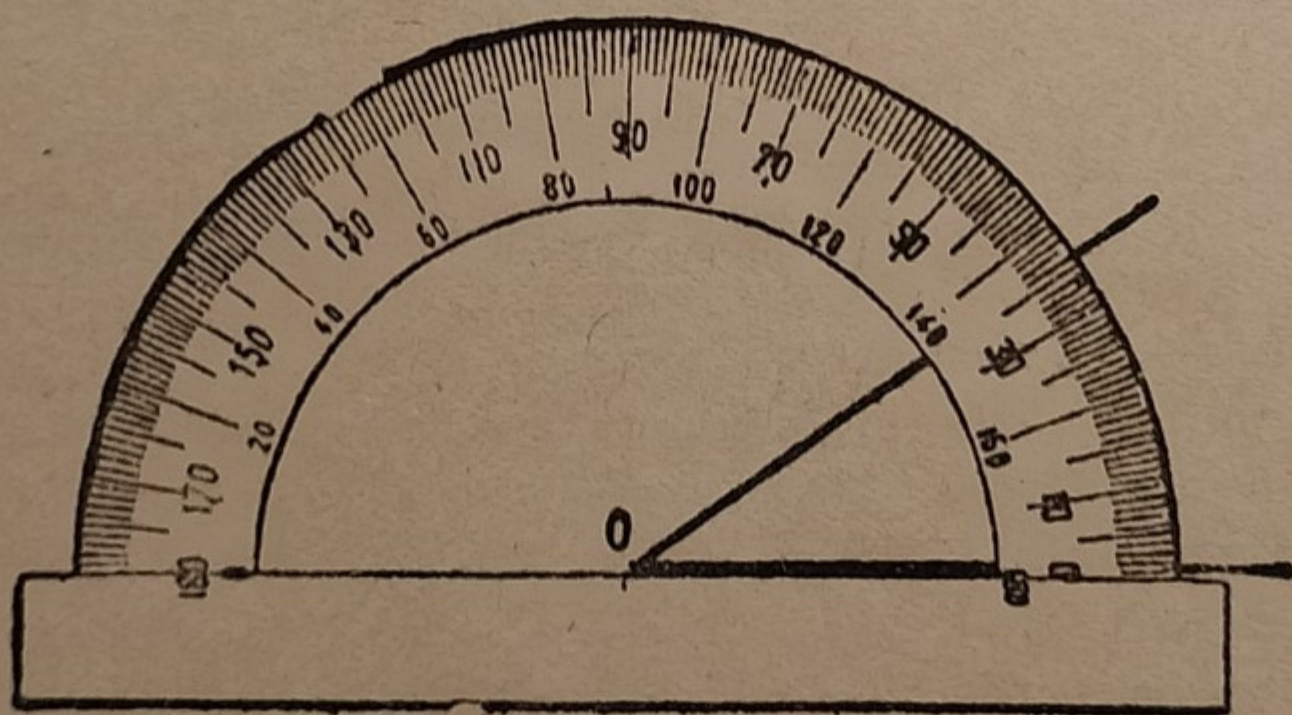



Fig. 77

cialmente nel disegno, si ottiene con uno strumento che si dice *rapportatore*, o *semicircolo graduato* (fig. 77). La misura di un arco ci rappresenta la misura dell'angolo al centro corrispondente.

Per misurare l'angolo $A\hat{O}B$ si fa coincidere il *centro* e il *raggio* del semicircolo col *vertice* O e un *lato* OA dell'angolo e si fa cadere il semicircolo sull'angolo.

Se l'altro lato OB si trova in corrispondenza di un'intaccatura del semicircolo, il numero corrispondente ci darà la misura dell'arco AB e quindi dell'angolo $A\hat{O}B$.

Se l'altro lato OB si trova fra due intaccature successive si può ottenere la misura dell'arco e quindi dell'angolo, per *difetto* o per *eccesso*, a *meno di 1 grado*.

ESERCIZI.

1. Trovare il segmento somma di due segmenti di cm. 4 e cm. 3,5.
2. Trovare il segmento differenza di due segmenti di cm. 8,6 e cm. 5,4.
3. Trovare la somma di 3 segmenti ciascuno di cm. 4,2.
4. Qual'è il multiplo di un angolo di 30° secondo il numero 7?
5. Qual'è il multiplo di un angolo di 25° 20′ secondo il numero 4?
6. Quali sono i summultipli dell'angolo piatto secondo i numeri 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10?
7. Trovare $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ dell'angolo retto.
8. Di quanti gradi è l'angolo che formano le lancette di un orologio che segna le ore 15?
9. Di quanti gradi è l'angolo che formano le lancette di un orologio che segna le ore 6?
10. Qual'è la misura dell'angolo formato dalle lancette di un orologio che segna le ore 13, oppure le ore 17?
11. Col rapportatore si disegni la somma di due angoli di 24°.
12. Col rapportatore si disegnino tre angoli di 45°, 67° e 58°.
13. Col rapportatore si disegni la differenza di due angoli di 87° e 52°.
14. Col rapportatore si disegni un angolo di 28° e il suo quadruplo.
15. Col rapportatore si disegni un angolo di 117° e la sua terza parte.
16. Trovare la somma di 3 angoli le cui misure sono: 24°10′15″, 12°18′20″, 15°19′8″.
17. Trovare la somma di 3 angoli le cui misure sono: 30°48′56″, 27°15′18″, 35°42′28″.
18. Trovare la differenza di due angoli le cui misure sono: 78°42′55″, 29°15′34″.
19. Trovare la differenza di due angoli le cui misure sono: 67°12′25″, 45°18′37″.

20. Trovare il quadruplo dell'angolo di 15°8′12″ e quello dell'angolo di 25°34′47″.

21. Trovare la terza parte dell'angolo di 27°15′24″.

22. Trovare la quinta parte dell'angolo di 27°18′35″.

23. Trovare il supplemento dell'angolo di 78° 42′24″.

24. La misura di uno degli angoli formati da due rette che si tagliano è 27°48′32″. Calcolare la misura degli altri tre angoli.

25. Trovare il complemento dell'angolo di 57°32′45″.

26. Trovare l'ampiezza di due angoli adiacenti di cui uno è doppio dell'altro.

27. Trovare l'ampiezza di due angoli complementari di cui uno è quadruplo dell'altro.

28. Di due angoli supplementari uno è i $\frac{3}{5}$ dell'altro. Trovare la misura dei due angoli.

29. Di due angoli complementari uno è i $\frac{2}{3}$ dell'altro. Trovare la misura dei due angoli.

30. La somma di due angoli, uno doppio dell'altro, è 85°42′21″. Trovare la misura dei due angoli.

31. La somma di due angoli è 87°45′24″, la loro differenza 12°37′40″. Trovare la misura dei due angoli.

31. Cinque angoli che occupano l'intero piano, hanno il vertice in uno stesso punto. Il primo angolo è 80°18′, il secondo 64°24′. Il terzo è uguale alla somma e il quarto alla differenza dei primi due. Trovare la misura del quinto angolo.

32. Uno degli angoli alterni interni formati da due rette parallele con una trasversale è 64°32′40″. Trovare la misura degli altri sette angoli.

33. Due angoli coniugati interni formati da due rette parallele con una trasversale sono uno doppio dell'altro. Trovare la misura di questi due angoli e quella dei rimanenti.

34. Un angolo acuto di un triangolo rettangolo è 25°. Trovare la misura degli altri due angoli.

35. In un triangolo rettangolo un angolo acuto è la metà dell'altro. Trovare la misura di questi due angoli.

36. L'angolo al vertice di un triangolo isoscele è 45°30′. Trovare la misura degli angoli alla base.

37. Trovare la misura degli angoli di un triangolo isoscele sapendo che l'angolo al vertice è la metà di ciascuno degli angoli alla base.

38. Un angolo alla base di un triangolo isoscele è 65°24′30″. Trovare la misura dell'angolo al vertice.

39. Un angolo esterno adiacente all'angolo alla base di un triangolo isoscele è 115°20′40″. Trovare la misura degli angoli del triangolo.

40. L'angolo esterno adiacente all'angolo al vertice di un triangolo isoscele è 125°10′20″. Trovare la misura degli angoli del triangolo.

41. Due angoli di un triangolo sono 54°35′20″, 75°15′24″. Trovare la misura del terzo angolo.

42. Uno degli angoli di un triangolo è doppio del secondo e questo è triplo del terzo. Trovare la misura dei tre angoli del triangolo.

43. Un angolo interno di un triangolo è 53°82′30″; uno degli angoli esterni non adiacente ad esso è 105°12′35″. Trovare la misura degli altri due angoli interni.

44. Trovare la misura degli angoli di un triangolo rettangolo sapendo che uno degli angoli acuti è $\frac{3}{5}$ dell'altro.

45. L'angolo alla base di un triangolo isoscele è $\frac{2}{3}$ dell'angolo esterno adiacente. Trovare la misura dei tre angoli del triangolo.

46. In un triangolo ABC, l'angolo $\hat{A}$ è 73°15′, l'angolo $\hat{B}$ 38°48′. Qual'è il lato maggiore e quale il minore?

47. Un angolo di un triangolo è 56° 14′. Che angolo formano le bisettrici degli altri due angoli del triangolo?

48. **La somma degli angoli interni di un poligono si ottiene moltiplicando 180° per il numero dei lati, e togliendo dal prodotto 360°.**

49. Trovare la somma degli angoli interni di un quadrilatero, di un pentagono e di un esagono.

50. Tre angoli di un quadrilatero misurano ciascuno 85°25′. Trovare la misura del quarto angolo.

51. In un quadrilatero due angoli misurano ciascuno 75°45′: gli altri due sono uno doppio dell'altro. Trovare la misura degli altri due angoli.

52. In un pentagono quattro angoli misurano ciascuno 103°35′. Trovare la misura del quarto angolo.

53. In un pentagono tre angoli misurano ciascuno 113°20′. Gli altri due sono uno i $\frac{3}{5}$ dell'altro. Trovare la misura di questi due angoli.

54. Cinque angoli di un esagono sono ciascuno 124°15′. Si trovi la misura del sesto angolo.

55. *La somma degli angoli esterni di un poligono, qualunque sia il numero dei lati, è 360.*

56. La somma degli angoli di un poligono è 1260°. Quanti lati ha il poligono? (*a 1620° si aggiungono 360° e il risultato si divide per la somma degli angoli di un triangolo, cioè per 180°*).

CAPITOLO IX.

Poligoni regolari.

93. Un poligono si dice regolare se ha tutti i lati uguali e tutti gli angoli uguali, cioè se è equilatero ed equiangolo.

Il triangolo equilatero ed il quadrato sono poligoni regolari.

Osservazione. — Un triangolo che sia o *equilatero*, o *equiangolo* è regolare, mentre ciò non si verifica per gli altri poligoni. Il rettangolo, che è equiangolo, ma non equilatero, non è regolare; così il rombo, che è equilatero, ma non equiangolo.

94. *Un poligono si dice* **inscritto** *in una circonferenza se tutti i suoi vertici sono punti della circonferenza. La circonferenza si dice* **circoscritta** *al poligono.*

Un poligono si dice **circoscritto** *ad una circonferenza se i suoi lati sono tangenti la circonferenza. La circonferenza si dice* **inscritta** *nel poligono.*

95. Se si divide una circonferenza in un dato numero di parti uguali e si uniscono ordinatamnete i punti di divisione si ottiene un poligono regolare inscritto.

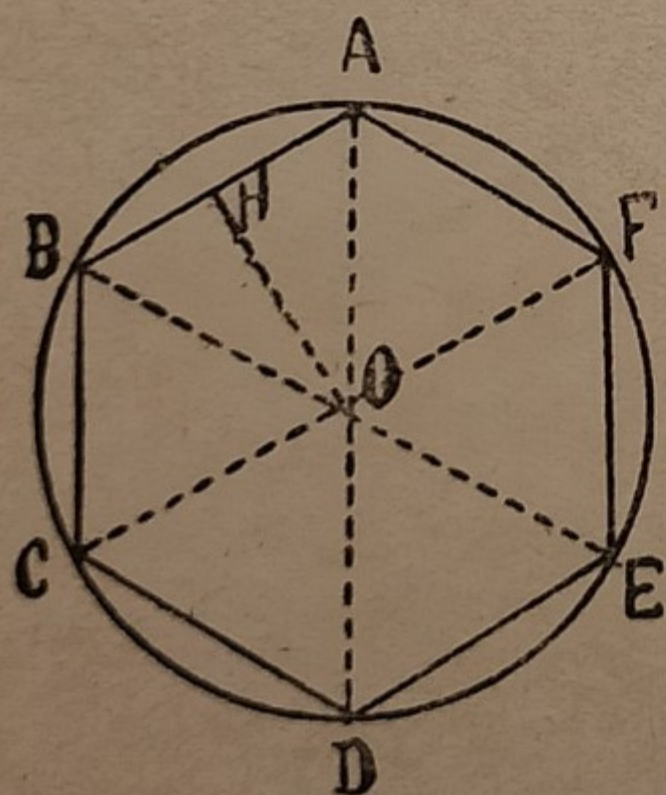



Fig. 78

Infatti se dividiamo la circonferenza O (fig. 78) in sei parti uguali e uniamo i punti di divisione, otteniamo il poligono $A\ B\ C\ D\ E\ F$ che è regolare, perchè se si ricopia il poligono e si fa coincidere con $B\ C\ D\ E\ F\ A$ ne avviene che ogni lato e ogni angolo coincide col suo successivo.

96. Il *centro* e il *raggio* della circonferenza si dicono *centro* e *raggio* del poligono regolare.

Il segmento $O H$, perpendicolare al lato $A B$, è il raggio del circolo inscritto, e si dice **apotema** del poligono.

97. *Problema 1.°* — **Inscrivere un quadrato in una data circonferenza.**

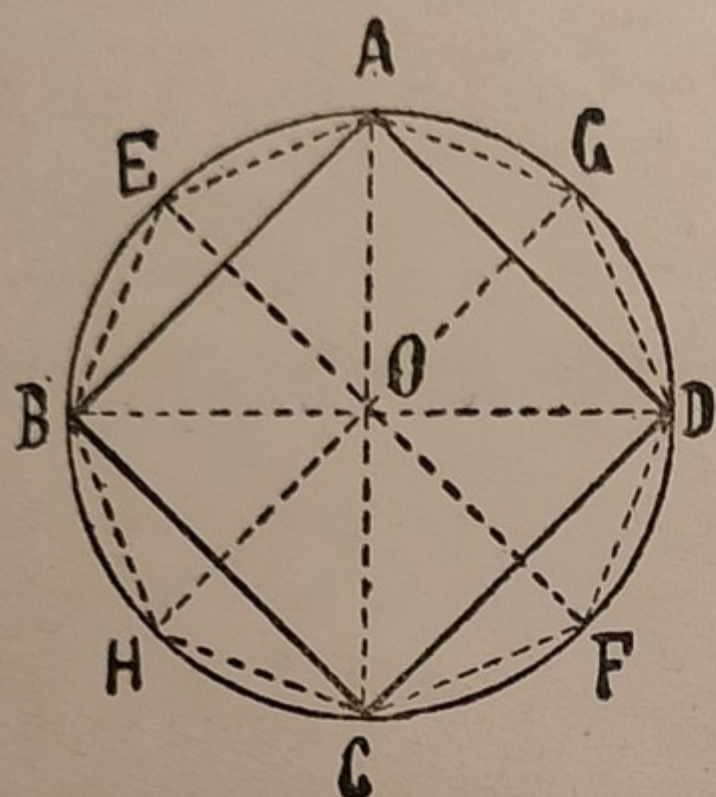



Fig. 79

Condotti due diametri $A C$ e $B D$ (fig. 79) perpendicolari tra loro, la circonferenza O viene divisa in quattro archi uguali, perchè corrispondono ad angoli al centro uguali (angoli retti); quindi unendo i punti di divisione si ottiene il quadrato $A B C D$.

Se si tirano altri due diametri $E F$, $H G$, perpendicolari ai lati del quadrato, essi bisecano gli angoli retti formati da $A C$ e $B D$, e la circonferenza viene divisa in otto parti uguali; unendo i punti di divisione si ottiene l'ottagono regolare $A E B H C F D G$.

Analogamente si può inscrivere un poligono regolare di 16, 32 ecc., lati.

98. *Problema 2.°* — **Inscrivere un esagono regolare in una data circonferenza**

Se $A B$ (fig. 80) è un lato dell'esagono regolare inscritto nella circonferenza O, l'arco $A B$ è la sesta parte della circonferenza e quindi l'angolo $A \hat{O} B$ del triangolo isoscele $A O B$ è di 60°; la somma dei due angoli alla base è di 180° — 60° = 120°, ed essendo uguali, ciascuno è di 60°; il triangolo $A \hat{O} B$ è *equiangolo* e quindi *equilatero*.

Si deduce:

Il lato dell'esagono regolare iscritto in una circonferenza è uguale al raggio.

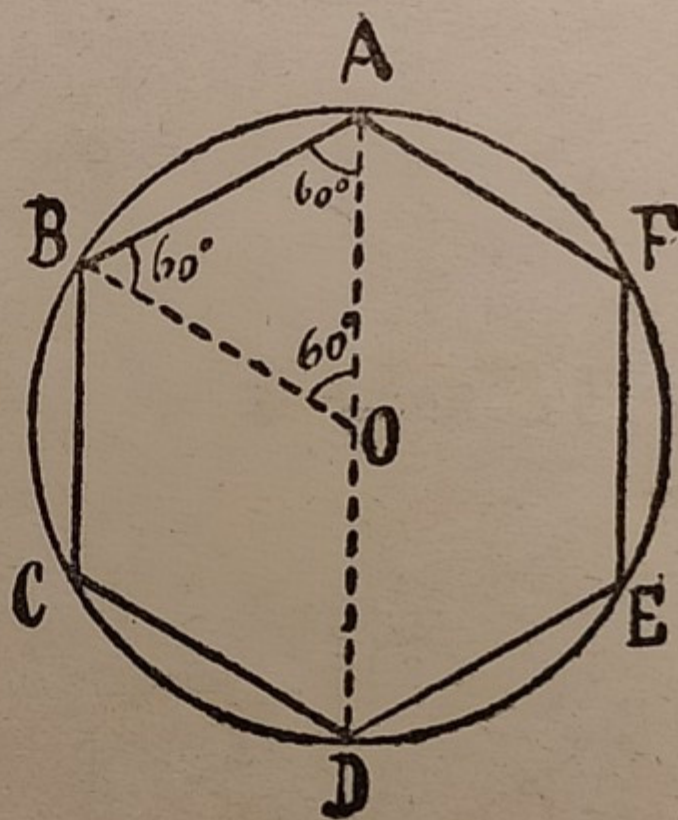



Fig. 80

Allora per dividere la circonferenza O in sei parti uguali si tira un diametro $A D$; centro in A e in D, con apertura di compasso uguale al raggio $O A$, si taglia la circonferenza rispettivamente in B, F e in C, E. Unendo i punti di divisione si ha l'esagono regolare inscritto.

99. *Problema 3.°* — **Inscrivere un triangolo equilatero in una data circonferenza.**

Si divide la circonferenza data O (fig. 81) in sei parti uguali $A B$, $B C$, $C D$, $D E$, $E F$, $F A$. Allora gli archi $A C$, $C E$, $E A$ saranno uguali, perchè

doppi di archi uguali, e il triangolo ACE sarà evidentemente equilatero.

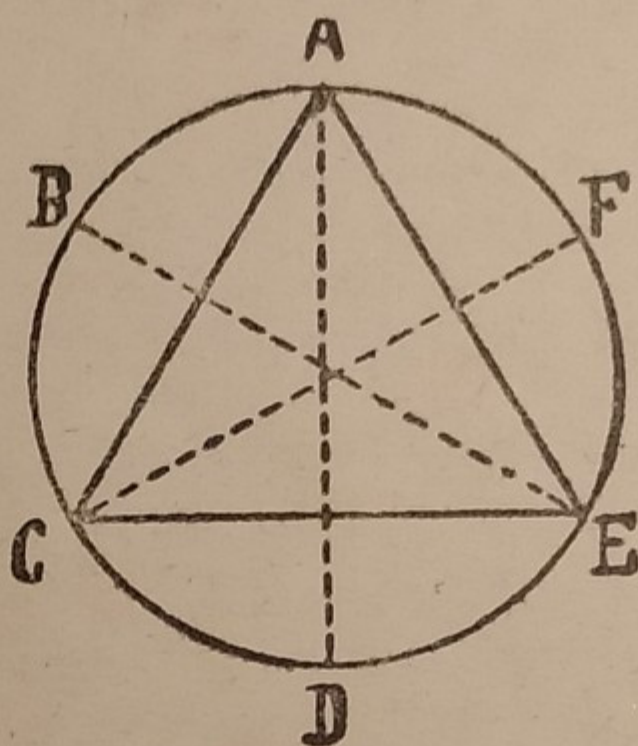



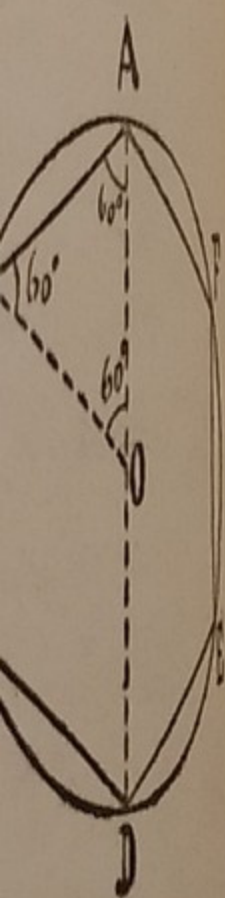
Fig. 81

100. Divisa la circonferenza O in sei parti uguali, si può dividere in 12 parti uguali, collo stesso metodo seguito per l'ottagono regolare.

Unendo i punti di divisione avremo il dodecagono regolare iscritto.

In modo analogo si può dividere la circonferenza in 24, 48, ecc., parti uguali e si possono ottenere i poligoni regolari iscritti di 24, 48, ecc. lati.

ESERCIZI.

1. Trovare la misura di ciascuno degli angoli di un *triangolo equilatero*, di un *quadrato*, di un *pentagono*, *esagono*, *ottagono* e *dodecagono regolari*.
2. Se si uniscono i punti di mezzo dei lati di un quadrato, si ottiene un altro quadrato che è la metà del primo.
3. Se si uniscono i punti di mezzo dei lati di un esagono regolare si ottiene un altro esagono regolare.
4. Se dai vertici di un quadrato si tirano le parallele alle diagonali si ottiene un altro quadrato doppio del primo.
5. Se si uniscono gli estremi corrispondenti di due lati opposti di un esagono regolare si ottiene un rettangolo.
6. Trovare la misura degli angoli del triangolo che si ottiene unendo due vertici non consecutivi di un esagono regolare.
7. I punti di mezzo di due coppie di lati opposti di un esagono regolare sono vertici di un rettangolo.
8. Trovare la misura dell'angolo che si ottiene in un pentagono regolare unendo il centro coi punti di mezzo di due lati non consecutivi.
9. Descrivere la circonferenza inscritta in un quadrato dato.
10. Descrivere la circonferenza inscritta in un esagono regolare.
11. Descrivere la circonferenza inscritta in un triangolo equilatero.

CAPITOLO X.

Misura dei poligoni.

101. *Per misurare una superficie si assume come unità di misura il quadrato avente per lato l'unità di lunghezza, e praticamente il* **metro quadrato** (**m.**^{2}).

Sono noti i multipli del metro quadrato che sono: il *decametro quadrato* (**dam.**^{2}), l'*ettometro quadrato* (**hm.**^{2}), il *chilometro quadrato* (**km.**^{2}), il *miriametro quadrato* (**Mm.**^{2}).

I sottomultipli sono:

Il *decimetro quadrato* (**dm.**^{2}), il *centimetro quadrato* (**cm.**^{2}), il *millimetro quadrato* (**mm.**^{2}).

Le unità di superficie procedono di 100 in 100.

La misura di una superficie si dice **area** della superficie; essa non si ottiene direttamente, ma si deduce dalla misura di alcune dimensioni della figura che si studia, e applicando le operazioni fondamentali dell'aritmetica.

102. Area del rettangolo. Consideriamo un rettangolo

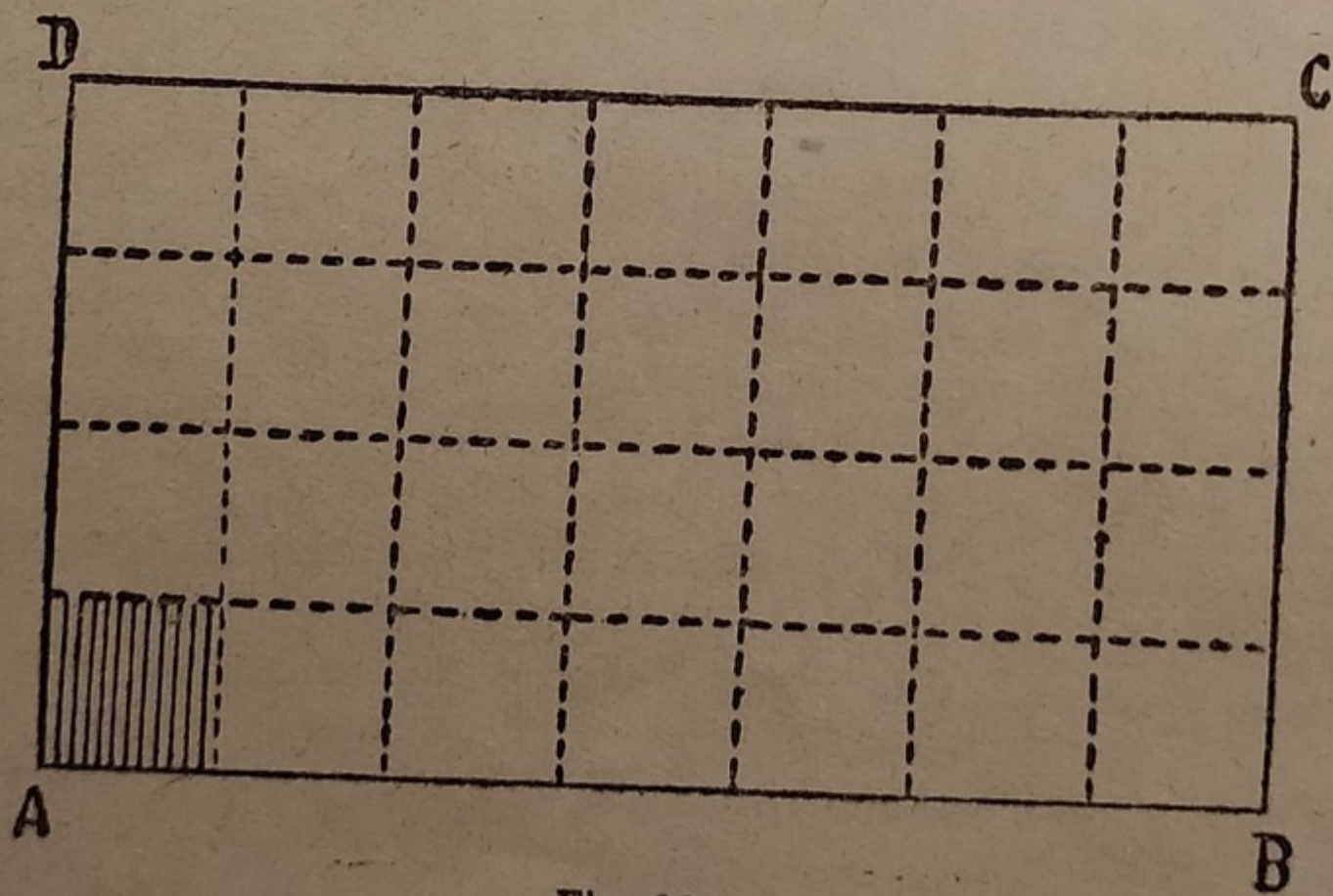



Fig. 82

A B C D (fig. 82), le cui dimensioni sono la base *A B* e l'altezza *A D*.

Supponiamo $A B =$ cm. 7 e $A D =$ cm. 4.

Divisi $A B$ e $A D$ rispettivamente in 7 e in 4 parti uguali conduciamo dai punti di divisione di $A D$ le parallele ad $A B$, e dai punti di divisione di $A B$ le parallele ad $A D$. Il rettangolo vien diviso in 4 piccoli rettangoli ciascuno dei quali contiene 7 *centimetri quadrati;* quindi l'area del rettangolo è 4 volte 7 cm.², cioè 28 cm.² Indicando con S l'area del rettangolo si ha:

$$S = \text{cm.}^2\,(7 \times 4) = \text{cm.}^2\,28.$$

103. Supponiamo ora $A B =$ cm. 7,3 $A D =$ cm. 4,6. Ridotte le misure dei due lati in millimetri si ha: $A B =$ = mm. 73. $A D =$ mm. 46. Allora il rettangolo si può decomporre in 46 rettangoli ciascuno dei quali contiene 73 *millimetri quadrati;* perciò l'area del rettangolo è 46 volte 73 mm.², cioè:

$$S = \text{mm.}^2\,(73 \times 46) = \text{mm.}^2\,3358 =$$

$$= \text{cm.}^2\,33{,}58.$$

Ma 33,58 è il prodotto di 7,3 per 4,6; quindi:

$$S = \text{cm.}^2\,(7{,}3 \times 4{,}6) = \text{cm.}^2\,33{,}58.$$

Da quanto si è detto si deduce la

Regola. — **Per trovare l'area del rettangolo si moltiplica la misura della base per quella dell'altezza.**

Indicando con b la *misura della base* del rettangolo e con h quella dell'*altezza* si ha la formula:

$$S = b \times h.$$

Osservazione. — La base e l'altezza di un rettangolo, come le dimensioni di qualunque figura, debbono essere misurate colla stessa unità lineare.

104. Area del quadrato. — Il quadrato è un rettangolo avente la base uguale all'altezza. Si ha quindi la

Regola. — **Per trovare l'area del quadrato si moltiplica la misura del lato per sè stessa.**

Se l è la misura del lato del quadrato si ha:

$$S = l^2.$$

150. Sappiamo che dato il quadrato di un numero si ottiene il numero colla *estrazione di radice quadrata*.

Quindi:

Regola. — **Data l'area del quadrato si trova la misura del lato estraendo la radice quadrata dall'area.**

Si ha la formula:

$$l = \sqrt{S}.$$

106. Area del parallelogramma. — Il parallelogramma ha la stessa area del rettangolo avente la stessa base e la stessa altezza. Si ha quindi la

Regola. — **Per trovare l'area del parallelogramma si moltiplica la misura della base per quella dell'altezza**.

107. Area del triangolo. — Il triangolo ha la stessa area della metà del parallelogramma di ugual base ed uguale altezza.

Regola. — **Per trovare l'area del triangolo si moltiplica la misura della base per quella dell'altezza e si divide il prodotto per 2.**

Se b è la misura della base e h quella dell'altezza si ha la formula:

$$S = \frac{b \times h}{2},$$

che si può scrivere anche:

$$S = \frac{b}{2} \times h, \quad S = b \times \frac{h}{2}.$$

In particolare:

1.° **L'area del triangolo rettangolo è uguale al semiprodotto dei cateti.**

2.° **L'area del rombo è uguale al semiprodotto delle diagonali.**

108. *Area del trapezio*. — Il trapezio ha la stessa area del triangolo avente per base la somma delle basi del trapezio e per altezza la medesima altezza del trapezio.

Si ha quindi la

Regola. — **Per trovare l'area del trapezio si moltiplica la somma delle basi per l'altezza e si divide il prodotto per 2.**

Se a e b rappresentano le misure delle basi e h quella dell'altezza, si ha la formula:

$$S = \frac{(a + b) \times h}{2}.$$

109. Area del poligono regolare. — Se si unisce il centro di un poligono regolare coi vertici si decompone il poligono in tanti triangoli isosceli uguali quanti sono i lati. Se l è il lato del poligono regolare, a l'apotema e n il numero dei lati, l'area del poligono sarà:

$$S = \frac{l \times a}{2} \times n,$$

ossia:

$$S = \frac{n \times l \times a}{2}.$$

Ma $n \times l$ è uguale al *perimetro* p del poligono; quindi:

$$S = \frac{p \times a}{2},$$

da cui la

Regola. — **Per trovare l'area del poligono regolare si moltiplica il perimetro per l'apotema e si divide il prodotto per 2.**

110. Gli elementi del poligono regolare sono: il *lato*, l'*apotema* e il *raggio*. Questi elementi sono dipendenti tra loro, cioè dato il valore di uno di essi rimangono determinati gli altri due. Così dato un elemento rimane pure determinata l'area del poligono.

La seguente tabella ci dà l'*apotema* e l'*area* dei poligoni regolari più noti quando è dato il lato.

POLIGONO REGOLARE	NUMERO per cui bisogna moltiplicare il lato per avere l'apotema	NUMERO per cui bisogna moltiplicare il quadrato del lato per avere l'area
Triangolo	0,288	0,433
Quadrato	0,500	1,000
Pentagono	0,688	1,720
Esagono	0,866	2,598
Ottagono	1,207	4,828
Decagono	1,539	7,694
Dodecagono	1,866	11,196

ESERCIZI.

1. La base di un rettangolo è m. 4,75, l'altezza m. 2,24. Trovare l'area.
2. Trovare l'area di un rettangolo che ha la base di m. 7,50 e l'altezza uguale ai $^3/_5$ della base.
3. Il perimetro di un rettangolo è m. 12,18, la base è doppia dell'altezza. Trovare l'area.
4. Il perimetro di un rettangolo è m. 19,60: l'altezza è $^2/_5$ della base. Trovare l'area.
5. L'area di un rettangolo è m.^{2} 40,48; l'altezza è dm. 32. Trovare il perimetro.
6. L'area di un rettangolo è m.^{2} 36,75, la base è tripla dell'altezza. Trovare la base e l'altezza.
7. Il lato di un quadrato è m. 4,38: trovare l'area espressa in dm.^{2}
8. La diagonale di un quadrato è m. 15,80. Trovare l'area.
9. Un campo di forma rettangolare ha la base di m. 78,50 e l'altezza di m. 65,80. Venne venduto a L. 750 l'ara. Quanto si è preso?
10. Quante mattonelle occorrono per pavimentare una camera lunga m. 5,2 e larga m. 3,5 essendo ogni mattonella lunga dm. 2,5 e larga dm. 1,8?
11. L'area di un rettangolo è m.^{2} 19,8450, l'altezza è $^1/_2$ della base. Trovare la base e l'altezza.
12. Un rettangolo ha l'area di m.^{2} 27,6250 e l'altezza di m. 3,25. Di quanto si deve diminuire la base perchè l'area diminuisca di m.^{2} 4,0625?
13. La base di un triangolo è m. $(8+{}^3/_5)$: l'altezza è uguale ai $^4/_5$ della base. Trovare l'area del triangolo.

14. I $^{4}/_{5}$ dell'area di un triangolo sono m.^{2} 80; la base è m. 5. Trovare l'altezza del triangolo.
15. L'area di un quadrato è m.^{2} 2088,49. Trovare il lato.
16. L'area di un rettangolo è m.^{2} 38,0250; l'altezza è $^{2}/_{5}$ della base. Trovare la base e l'altezza.
17. La base di un parallelogramma è dm. 28,5, l'altezza è $^{3}/_{5}$ della base. Trovare l'area in m.^{2}
18. La base di un triangolo è m. 5,20, l'altezza dm. 38. Trovare l'area in cm.^{2}
19. L'area di un triangolo è m.^{2} 8,84, la base è m. 3,4. Trovare l'altezza.
20. L'area di un triangolo è m.^{2} 9,3750, l'altezza è tripla della base. Trovare la base e l'altezza.
21. L'area di un triangolo è m.^{2} 8,64; la base è $^{3}/_{4}$ dell'altezza. Trovare la base e l'altezza.
22. Le diagonali di un rombo sono m. 4,6 e m. 7,8. Trovare l'area.
23. La somma delle dimensioni di un rettangolo è m. 29,75; l'altezza è $2/5$ della base. Trovare le due dimensioni e l'area.
24. La somma delle diagonali di un rombo è m. 72,24 e una è doppia dell'altra. Trovare l'area del rombo.
25. La somma delle diagonali di un rombo è m. 45 e una è i $^{3}/_{5}$ dell'altra. Trovare l'area.
26. L'area di un rombo è m.^{2} 107.5250; una diagonale è m. 8,5. Trovare l'altra diagonale.
27. Le basi di un trapezio sono m. 25,40 e m. 12,80; l'altezza è i $^{2}/_{5}$ della somma delle basi. Trovare l'area.
28. La somma delle basi di un trapezio è m. 729; la maggiore è doppia della minore e l'altezza è $^{3}/_{4}$ della base maggiore. Trovare l'area.
29. L'area di un trapezio è m.^{2} 4; le due basi sono m. 3,60 e m. 2,80. Trovare l'altezza.
30. Il lato di un pentagono regolare è m. 2,30. Trovare l'area (n. 110).
31. Il lato di un esagono regolare è m. 4,50. Trovare l'area.
32. Il lato di un ottagono regolare è m. 5,6. Trovare l'area.
33. Il lato di un decagono regolare è m. 3,6. Trovare l'area.
34. Il lato di un dodecagono regolare è m. 1,50. Trovare l'area.
35. Un triangolo rettangolo ha i cateti di m. 7,25 e m. 4,30. Trovare l'area.
36. Il lato di un quadrato è m. 16. Trovare la diagonale.
37. L'area di un triangolo equilatero è m.^{2} 97,4250. Trovare il lato (n. 110).
38. La diagonale di un quadrato è m. 6,40. Trovare il lato.
39. L'area di un rettangolo è m.^{2} 12,09, l'altezza m. 2,6. Trovare la base espressa in cm.
40. Il perimetro di un rettangolo è m. 12,8, l'altezza è $^{1}/_{3}$ della base Trovare l'area.

41. Il raggio di un circolo è m. 1,80. Trovare l'area dell'esagono regolare inscritto (98 - 110).

42. L'area di un esagono regolare è $m.^2$ 5,8455. Trovare il lato e il raggio dell'esagono (110 - 98).

43. L'area di un triangolo isoscele è $m.^2$ 221,88, la base è m. 25,8. Calcolare l'altezza.

44. Un campo ha la forma di un trapezio rettangolo le cui basi sono m. 180,4 e m. 120,5; l'altezza è m. 65,50. Venne venduto a L. 475 l'ara. Trovare quanto si è preso nella vendita.

45. Un terreno è formato da un quadrato e da un triangolo equilatero il cui lato, di m. 46,80, è uguale al lato del quadrato. Viene venduto a L. 350 l'ara. Trovare l'area del terreno e quanto si è preso nella vendita.

46. Un campo è formato da un trapezio e da un triangolo equilatero avente per base la base maggiore del trapezio. Il lato del triangolo è m. 160, la base minore m. 124,60 e l'altezza del trapezio m 50,80. Trovare l'area del campo.

CAPITOLO XI.

Misura della circonferenza e del circolo.

111. Consideriamo un poligono regolare inscritto in una circonferenza di centro O, per es. un esagono regolare $A\,B\,C\,D\,E\,F$ la cui apotema è $O\,H$ (fig. 83). Raddoppiando il numero dei lati si ha il dodecagono regolare inscritto, il cui lato è $B\,G$ e l'apotema $O\,H'$. Si vede che $B\,G$ è minore di $B\,A$ e OH' è maggiore di $O\,H$. Continuando a raddoppiare il numero dei lati del poligono inscritto si vede che ciascun lato diminuisce, perchè diminuisce l'arco che lo sottende e si arriverà ad un punto in cui l'arco si confonderà col lato sotteso e quindi il perimetro del poligono si confonderà colla circonferenza; mentre l'apotema si confonderà col raggio.

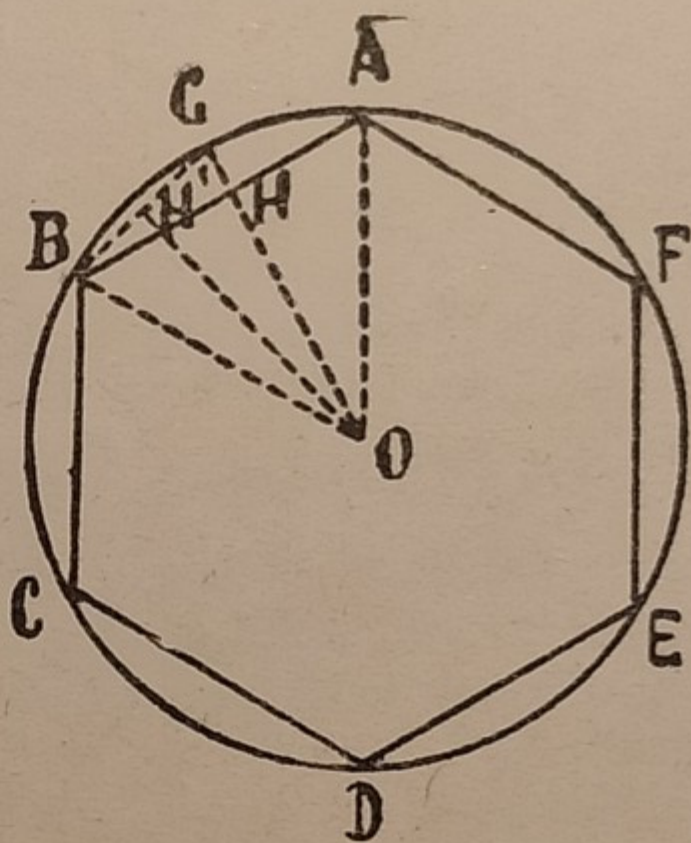



Fig. 83

112. Si dimostra che il rapporto della circonferenza al diametro è sempre lo stesso qualunque sia la lunghezza del raggio e quindi del diametro; ciò si esprime dicendo che **il rapporto della circonferenza al diametro è costante.** Questo rapporto non è un numero razionale e come valore approssimato si assume 3,14, a meno di $\frac{1}{100}$ per difetto, oppure 3,1416, a meno di $\frac{1}{10000}$ per eccesso.

Questo rapporto si indica in generale con la lettera greca π.

Se c è la lunghezza della circonferenza e r quella del raggio, si ha la formula:

$$\frac{c}{2\,r} = \pi,$$

da cui:

$$c = 2 \pi r.$$

Regola. — **La lunghezza approssimata della circonferenza si ottiene moltiplicando la lunghezza del diametro per 3,14.**

Reciprocamente: *data la lunghezza della circonferenza si può trovare il raggio.*

Infatti dalla formula:

$$c = 2 \pi r.$$

si deduce:

$$r = \frac{c}{2 \pi},$$

da cui la

Regola. — **Data la lunghezza della circonferenza si trova il raggio dividendo questa lunghezza per 2 π, ossia per 6,28.**

113. Sappiamo che *l'area di un poligono regolare si ottiene moltiplicando il perimetro per l'apotema e dividendo il prodotto per 2*. Allora per quanto abbiamo detto sopra si ha che l'area S del circolo è data da:

$$S = \frac{c \times r}{2},$$

ossia:

$$S = \frac{2 \pi r \,.\, r}{2} = \pi r^2,$$

da cui la

Regola. — **L'area del circolo si ottiene moltiplicando il quadrato del raggio per 3,14.**

Sperimentalmente si può verificare questa regola considerando un circolo di 1 dm. di raggio, di metallo sottilissimo. Si costruiscano quattro quadrati di 1 dm. di lato dello stesso metallo e spessore. Si scomponga uno di questi quadrati in 100 cm.^{2} e se ne taglino 14. Pesando il circolo e i tre quadrati coi 14 cm.^{2} si troveranno presso a poco pesi uguali.

Reciprocamente: *data l'area del circolo si può trovare il raggio.* Infatti dalla formula:

$$S = r^2 \pi$$

si deduce:

$$r^2 = \frac{S}{\pi},$$

e quindi:

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}},$$

da cui la

Regola. — **Data l'area di un circolo si trova il raggio estraendo la radice quadrata dal quoziente che si ottiene dividendo l'area per 3,14.**

ESERCIZI.

1. Trovare la lunghezza di una circonferenza il cui raggio è m. 1,25.
2. Trovare il raggio di una circonferenza lunga m. 8,792.
3. Il raggio di una ruota è m. 0,80. Trovare quanta strada ha percorso dopo 580 giri.
4. Il diametro di una moneta da una lira d'argento è 23 mm. Trovare la lunghezza dell'orlo.
5. Le lancette dei minuti e delle ore di un orologio sono mm. 18 e mm. 14. Trovare quanti cm. percorrono le estremità di queste lancette in 12 ore.
6. Le ruote anteriori di una carrozza hanno il raggio di m. 0,70, le posteriori di m. 0,90. Trovare quanti giri fanno le ruote anteriori intanto che le posteriori ne fanno 1500.
7. Trovare l'area di un circolo il cui raggio è m. 1.80.
8. Trovare l'area di un circolo il cui diametro è m. $(2+3/5)$.
9. Trovare l'area di un circolo la cui circonferenza è m. 7,536.
10. Trovare il raggio di un circolo la cui area è $m.^2$ 5,3066.
11. L'area di un circolo è $m.^2$ 8,548650. Trovare il raggio e la lunghezza della circonferenza.
12. Un quadrato ha il perimetro di m. 13,6; la circonferenza di un circolo è m. 13.816. Trovare quale delle due figure ha maggiore area.
13. Il lato del quadrato circoscritto ad un circolo è m. 1,68. Trovare l'area del circolo.
14. Il raggio di un circolo è m. 1,60. Trovare l'area dell'esagono regolare inscritto (n. 98 - 110).
15. Un terreno è formato da un rettangolo e da un semicircolo avente per diametro l'altezza del rettangolo. La base del rettangolo è m. 211,75, l'altezza m. 180,6. Trovare l'area del terreno e il suo valore se venne valutato L. 450 l'ara.
16. Il raggio di una circonferenza è m. 3. Trovare la lunghezza di un arco di 54°.

17. Il raggio di una circonferenza è di m. 1.20. Trovare la lunghezza di un arco di 75°28′.

18. Un arco di 48° è lungo cm. 57,6. Trovare la lunghezza della circonferenza a cui esso appartiene.

19. **L'area di un settore circolare si trova moltiplicando la lunghezza dell'arco del settore per la metà del raggio.**

20. Trovare l'area di un settore circolare il cui raggio è m. 1,60 e la lunghezza della base è dm. 35,4.

21. Il raggio di un circolo è m. 0,80. Trovare l'area di un settore il cui angolo al centro è 68°.

22. Il raggio di un circolo è m. 1.30. Trovare l'area di un settore circolare il cui angolo al centro è 46°.

23. Trovare il raggio di un settore circolare il cui angolo è 120° e l'area m.^{2} 2,355.

24. Il diametro di un circolo è m. 4,80. Dal centro si tira un raggio che divide un angolo piatto in due parti che stanno fra loro come 3 : 5. Trovare l'area dei due settori che si formano.

25. **Una corona circolare è la parte di circolo compresa fra due circonferenze concentriche.**

26. **L'area della corona circolare è uguale alla differenza delle aree dei due circoli concentrici.**

Se R e r sono i due raggi si ha:

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2).$$

27. I raggi di due circonferenze concentriche sono m. 2,70 e m. 1,90. Trovare l'area della corona circolare da esse determinata.

28. L'area di una corona circolare è m.^{2} 2,7318; il raggio del circolo minore è m. 1,30. Trovare l'area del circolo maggiore e il raggio.

29. Il raggio del circolo maggiore di una corona circolare è m. 3,50; l'area della corona circolare m.^{2} 12,0576. Trovare il raggio del circolo minore.

30. L'area di una corona circolare è m.^{2} 26,044416, il raggio minore è m. 2,16. Trovare il raggio del circolo maggiore.

31. L'area di un corona circolare è m.^{2} 3,7680; la circonferenza interna è m. 4,396. Trovare il diametro della circonferenza maggiore.

CAPITOLO XII.

Rette e piani nello spazio.

114. Se due rette nello spazio si trovano in uno stesso piano si dice che sono **complanari**. Allora possono avere un punto comune (punto di *intersezione*), oppure possono non avere alcun punto comune, e si dice che sono *parallele*.

115. Nello spazio si possono facilmente immaginare due rette che non abbiano nessun punto comune, senza essere poste nello stesso piano; queste rette si dicono **sghembe** o **aplanari**.

116. Una retta, distinta da un piano, non può avere più di un punto comune col piano.

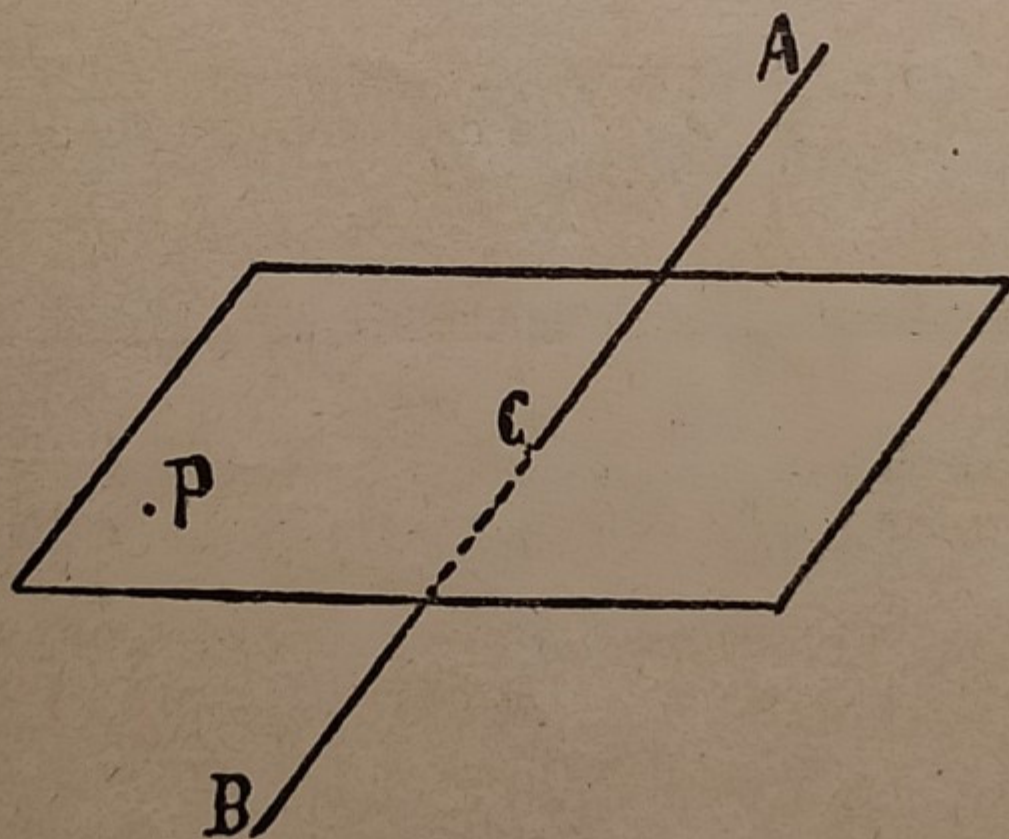



Fig. 84

La retta $A B$ (fig. 84) ha comune col piano P (1) il solo punto C; questo punto si dice *intersezione* della retta col piano.

---

(1) Rappresenteremo un piano mediante un parallelogramma supposto però esteso indefinitamente, e lo leggeremo brevemente enunciando uno qualunque dei suoi punti.

Se una retta ha due punti comuni con un piano giace nel piano.

117. *Due piani distinti non possono avere comune più di una retta, che si dice la* **intersezione** *dei due piani.*

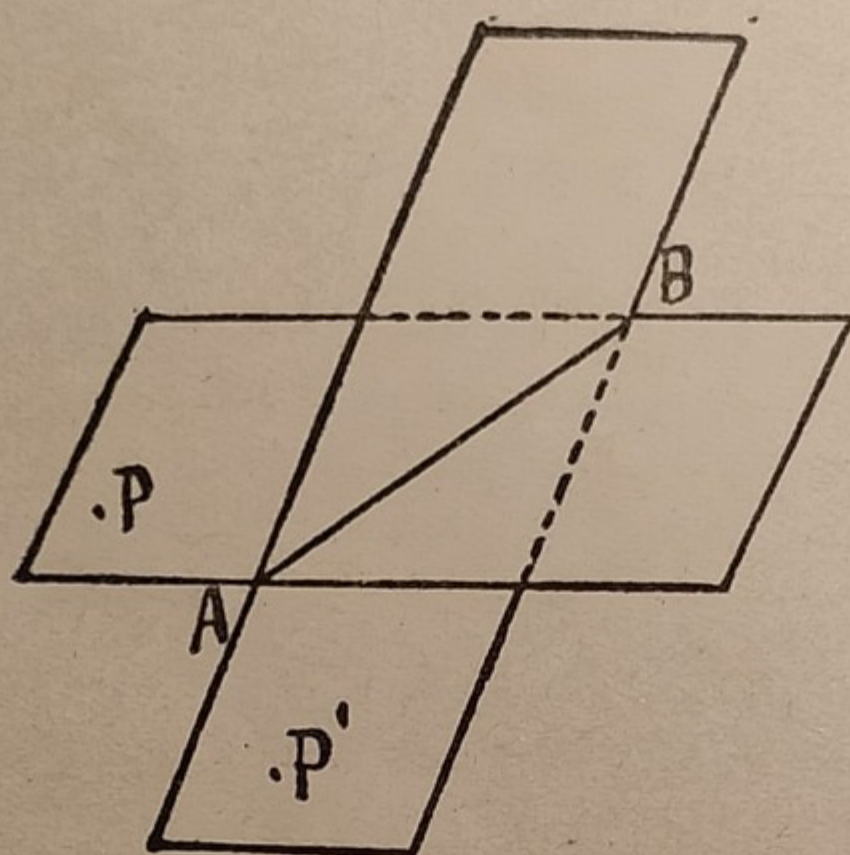



Fig. 85

La intersezione dei due piani P e P' (fig. 85) è la retta $A\ B$.

Due piani distinti non possono avere più di una retta comune; se avessero un altro punto comune coinciderebbero.

Rette e piani perpendicolari.

118. Consideriamo un piano M (fig. 86) e disponiamo due squadre in modo che due cateti siano situati sul piano

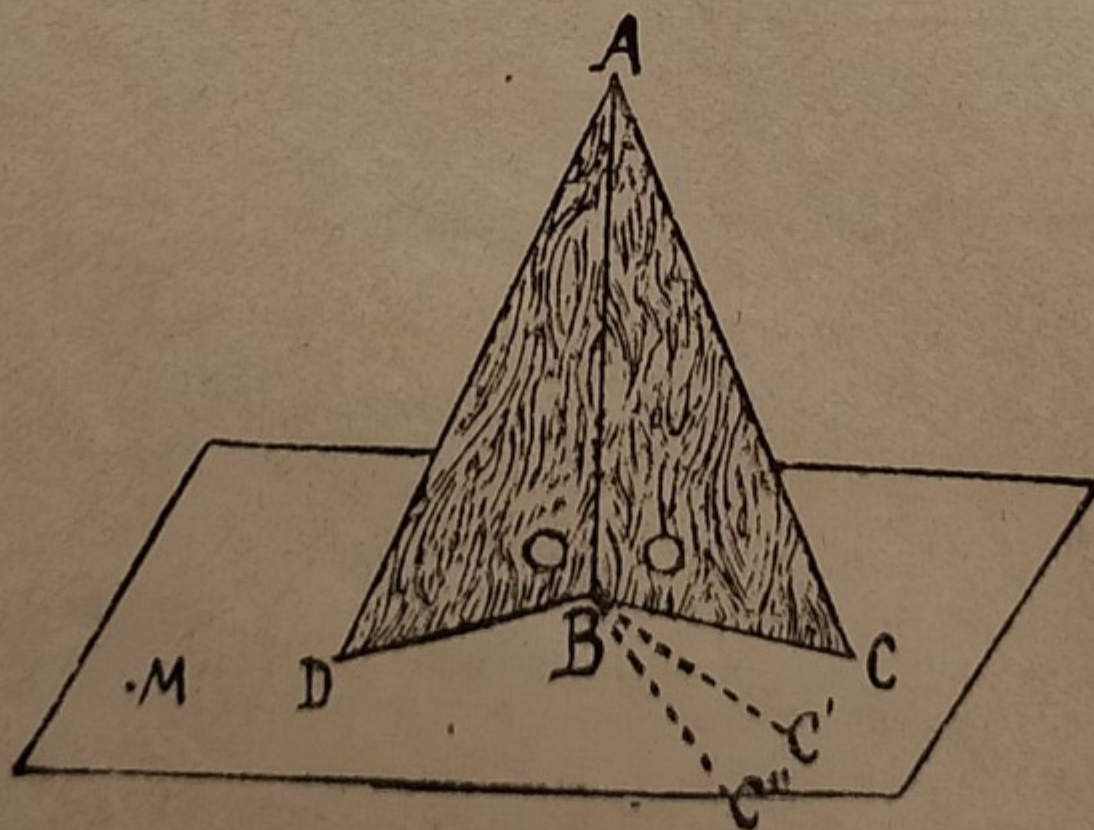



Fig. 86

e i vertici degli angoli retti coincidano con un punto B del piano; gli altri due cateti combaciano secondo la retta AB. Questa retta risulta perpendicolare alle due rette BC e BD del piano M nel punto B.

Facendo muovere una delle squadre, per es. ABC, intorno ad AB, il cateto BC si mantiene sempre sul piano e la retta AB risulta perpendicolare alle infinite posizioni di BC. Possiamo allora asserire che quando la retta AB è perpendicolare a due rette BC e BD del piano M è perpendicolare a tutte le rette di M passanti per B.

Def. — *Una retta che incontri un piano in un punto e sia perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per quel punto si dice che è* **perpendicolare al piano.**

119. Da quanto abbiamo detto risulta:

La condizione affinchè una retta sia perpendicolare ad un piano in un punto è che sia perpendicolare a due rette del piano passanti per quel punto.

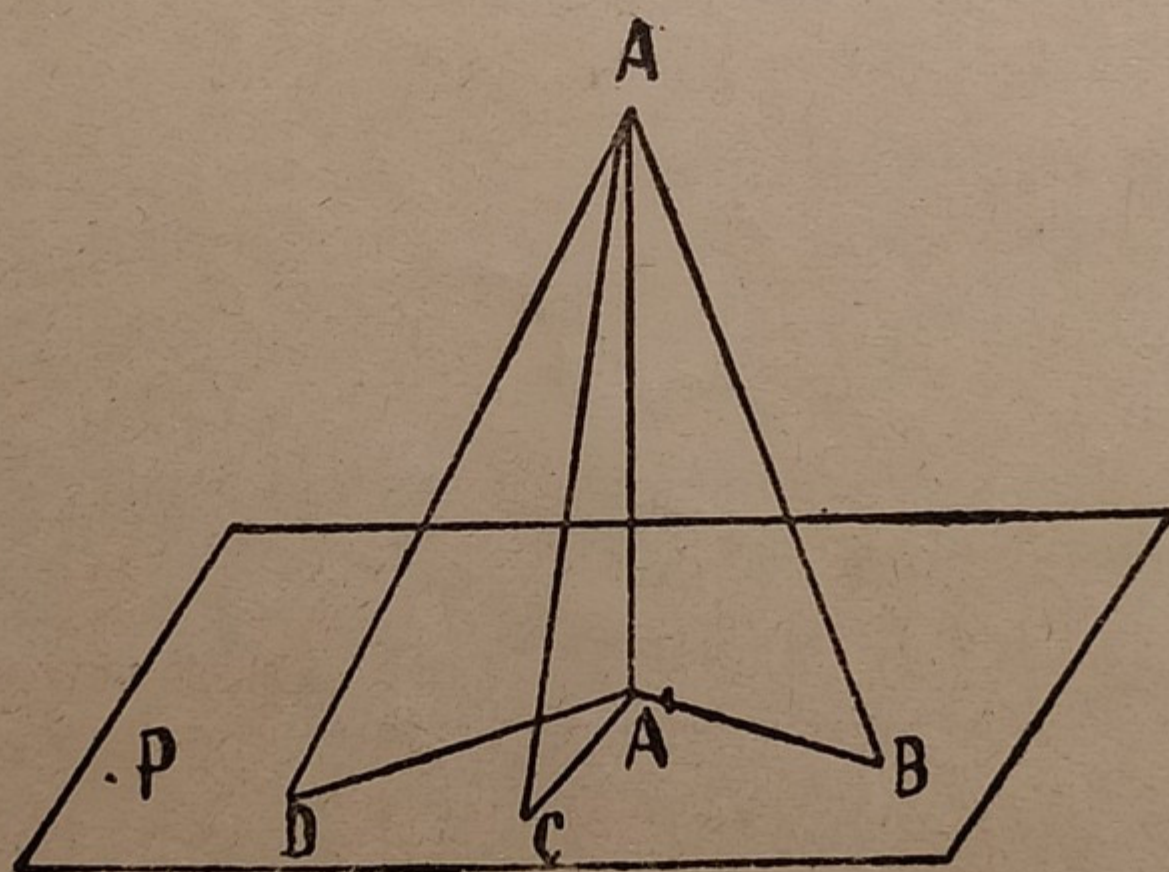



Fig. 87

120. Sia il piano P (fig. 87) e il punto A fuori di esso. Dal punto A si può condurre al piano una sola perpendicolare AA'; gli altri segmenti AB, AC, AD, si dicono *obliqui*.

Il segmento perpendicolare al piano è minore di qualunque segmento obliquo.

Il segmento perpendicolare condotto da un punto ad un piano si dice **distanza** *del punto dal piano.*

Rette e piani paralleli.

121. *Una retta ed un piano si dicono* **paralleli** *fra loro se non hanno nessun punto comune.*

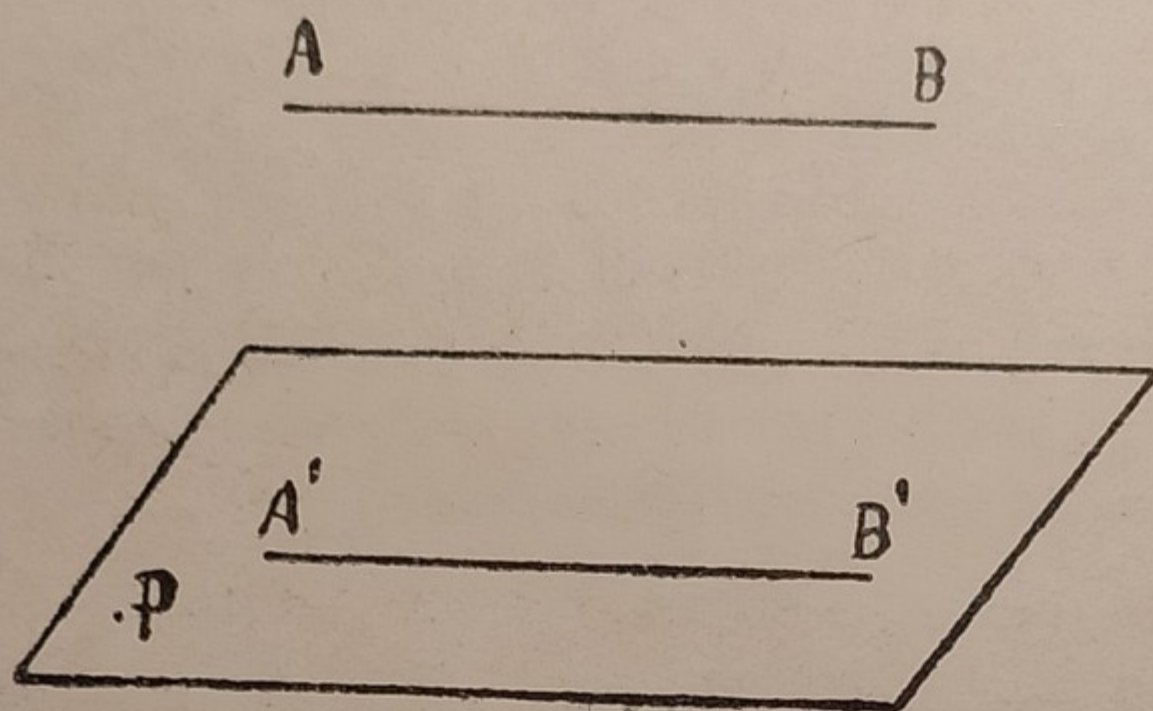



Fig. 88

La retta $A B$ (fig. 88) che non ha nessun punto comune col piano P è parallela al piano.

122. Una retta passante per un punto fuori di un piano e parallela ad una retta di esso, è parallela al piano.

La retta $A B$ (fig. 88) passante per A, fuori del piano P, e parallela alla retta $A' B'$ di P, è parallela al piano P.

123. Se una retta è parallela ad un piano tutti i suoi punti sono equidistanti dal piano.

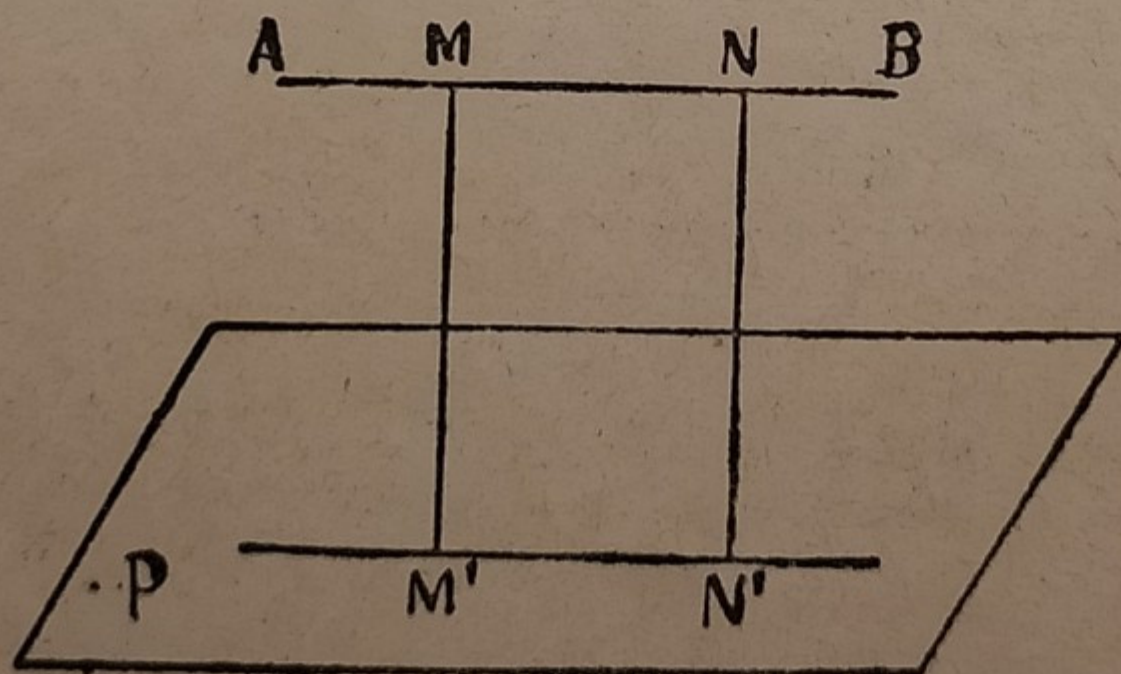



Fig. 89

Sia $A B$ (fig. 89) parallela al piano P. Le distanze $M M'$, NN' di due punti qualunque della $A B$ da P sono uguali.

La distanza di una retta parallela ad un piano dal piano è il segmento perpendicolare tirato da un punto qualunque di essa al piano.

La distanza della retta $A\ B$ dal piano P è $M\ M'$.

Piani paralleli.

124. *Due piani si dicono paralleli se non hanno alcun punto comune.*

125. Due piani perpendicolari ad una stessa retta, sono paralleli.

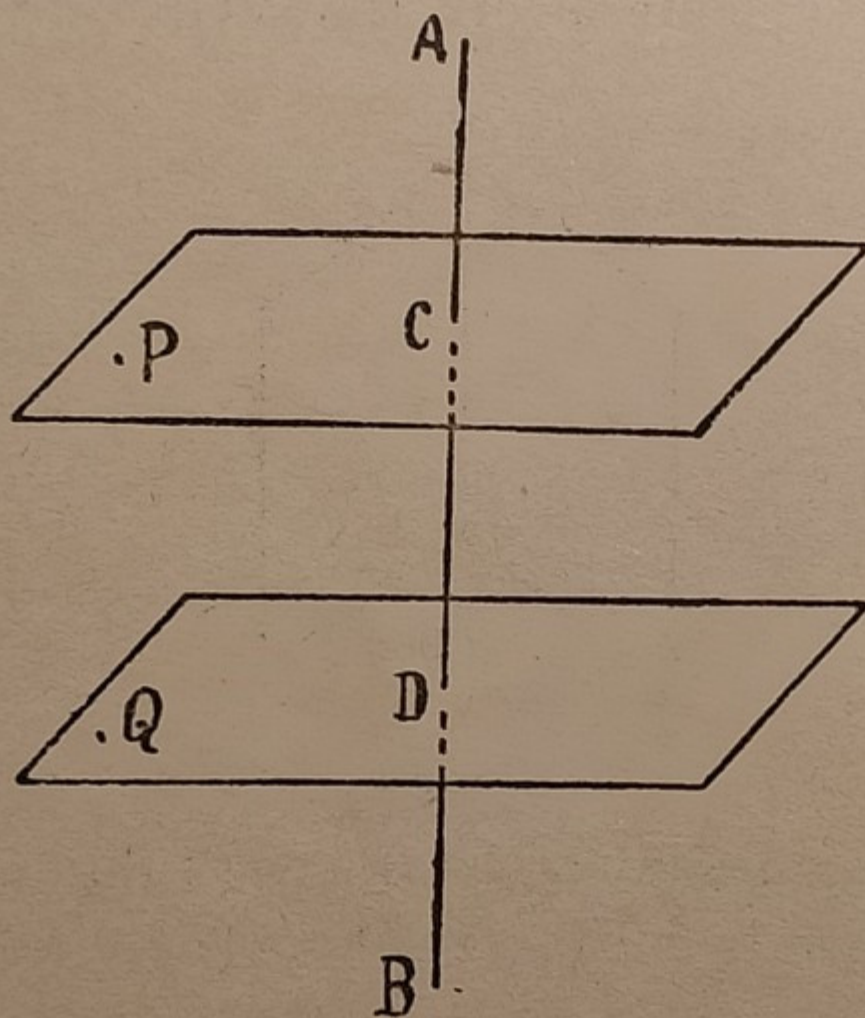



Fig. 90

I piani P e Q (fig. 90) perpendicolari alla retta $A\ B$ nei punti C e D, non hanno punti comuni e sono quindi paralleli.

126. Se due piani sono paralleli, tutti i punti di uno sono equidistanti dall'altro.

La distanza di due piani paralleli è il segmento perpendicolare condotto da un punto qualunque di un piano all'altro.

Il segmento $C\ D$ (fig. 90) è la *distanza* dei due piani paralleli P e Q.

CAPITOLO XIII.

Angoli diedri. — Piani perpendicolari.

Angoli diedri.

127. *Due semipiani che escono da una stessa retta dividono lo spazio in due parti, ciascuna delle quali si dice* **angolo diedro**, o **semplicemente diedro** (fig. 91).

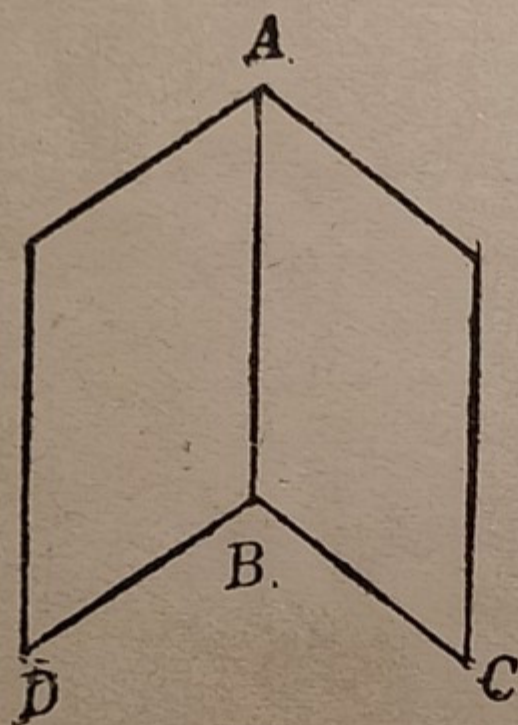



Fig. 91

La retta si dice **spigolo** del diedro, i due semipiani **facce**.

128. Il diedro le cui facce sono situate sullo stesso piano si dice **piatto**.

Il diedro piatto equivale ad un *semispazio*.

Un diedro si dice **convesso** se i prolungamenti delle facce, oltre lo spigolo, si trovano fuori del diedro; si dice **concavo** in caso contrario.

129. La metà di un *diedro piatto* si dice *diedro retto*.

Un diedro si dice *acuto* od *ottuso* secondo che è *minore* o *maggiore* di un diedro retto.

Come gli angoli piani, anche i *diedri possono essere uguali*. Ciò si può verificare costruendo due diedri con cartoncino e osservare se si possono sovrapporre esattamente.

Tutti i diedri retti sono uguali.

130. Due diedri si dicono *opposti allo spigolo* se le facce di uno sono i prolungamenti delle facce dell'altro.

Due diedri opposti allo spigolo sono uguali.

Piani perpendicolari.

131. Due piani si dicono perpendicolari l'uno all'altro quando incontrandosi formano quattro angoli diedri uguali (diedri retti).

132. Se una retta è perpendicolare ad un piano, ogni piano passante per essa è perpendicolare al piano dato.

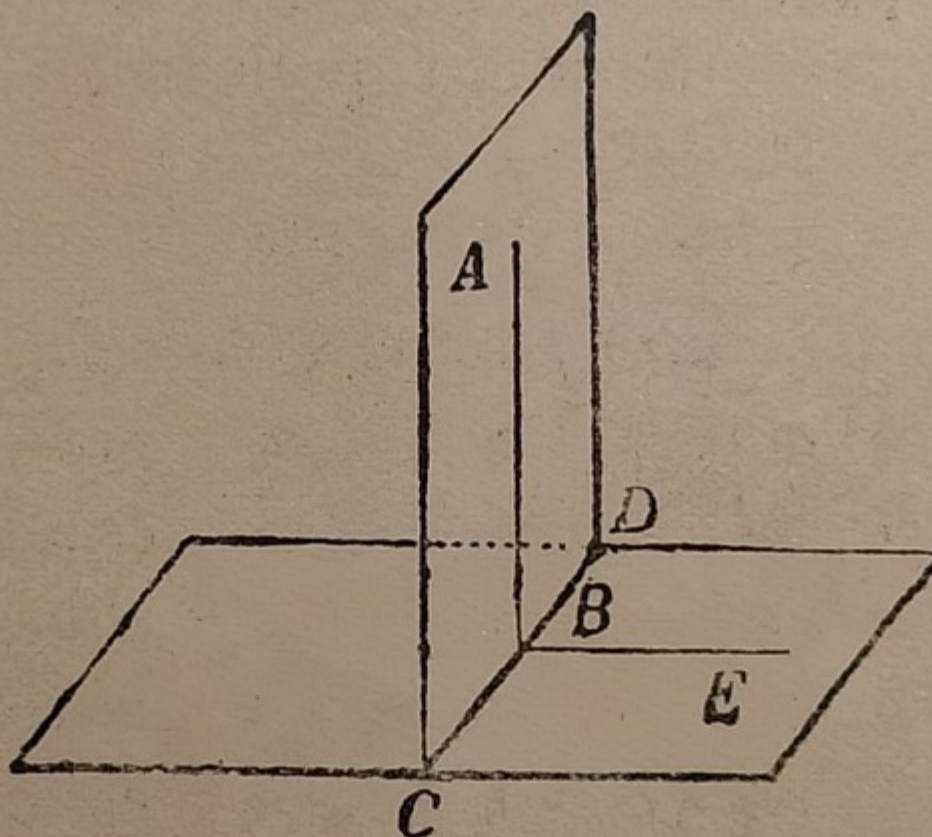



Fig. 92

Se la retta $A\ B$ è perpendicolare al piano P (fig. 92), un piano qualunque passante per $A\ B$ è perpendicolare a P.

Le pareti di una stanza sono perpendicolari al piano del pavimento.

CAPITOLO XIV.

Poliedri.

83. *Si dice* **poliedro** *un solido limitato da poligoni piani*. I poligoni si dicono le **facce** del poliedro, i *vertici* e i *lati*, **vertici** e **spigoli** del poliedro.

Un poliedro non può avere meno di *quattro facce*.

Un poliedro	con	*quattro*	*facce*	si	dice	*tetraedro*,
»	»	» *cinque*	»	»	»	*pentaedro*,
»	»	» *sei*	»	»	»	*esaedro*,
»	»	» *sette*	»	»	»	*ettaedro*,
»	»	» *otto*	»	»	»	*ottaedro*,
»	»	» *nove*	»	»	»	*ennaedro*,
»	»	» *dieci*	»	»	»	*decaedro*,
»	»	» *undici*	»	»	»	*endecaedro*,
»	»	» *dodici*	»	»	»	*dodecaedro*,
»	»	» *quindici*	»	»	»	*pentadecaedro*,
»	»	» *venti*	»	»	»	*icosaedro*.

Gli altri poliedri prendono nome secondo il numero delle facce.

Un poliedro è *convesso* se si trova dalla medesima banda rispetto al piano di ciascuna faccia; *concavo* in caso contrario.

Un tetraedro è sempre convesso. Le sue facce sono triangoli.

In un poliedro si dice *diagonale il segmento che unisce due vertici non situati sulla stessa faccia*.

Prisma.

134. Il prisma è un solido limitato da due poligoni uguali, situati su piani paralleli, e da tanti parallelogrammi quanti sono i lati di uno di questi poligoni (fig. 93).

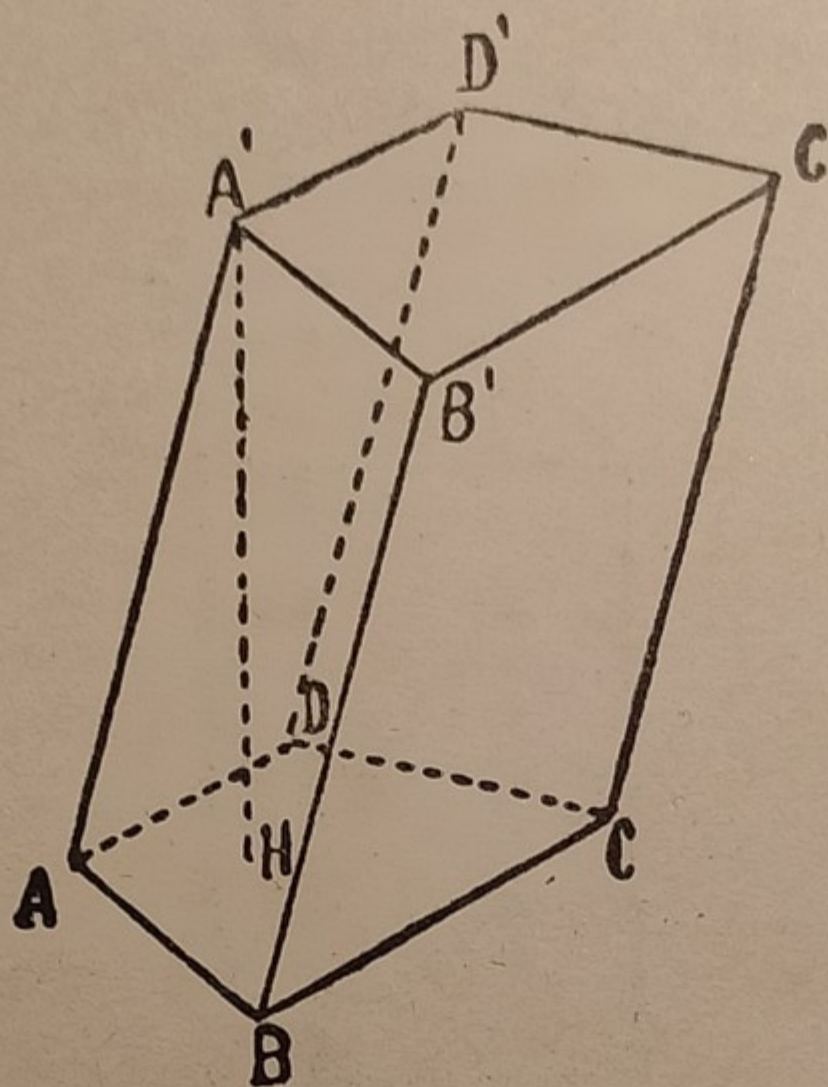



Fig. 93

I due poligoni si dicono le *basi* (1) del prisma, i parallelogrammi *facce laterali;* gli spigoli $A A'$, $B B'$ ... si dicono propriamente *spigoli* del prisma, mentre $A B$, $B C$... $A' B'$, $B' C'$ ... *lati* delle basi. La somma delle facce laterali prende il nome di *superficie laterale;* se alla superficie laterale si aggiungono le due basi si ha la superficie *totale*.

Un prisma si dice *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagonale*, ecc., secondo che la base è un *triangolo*, un *quadrilatero*, un *pentagono*, ecc.

Un prisma si dice **retto** se gli spigoli sono perpendicolari alle basi, altrimenti si dice **obliquo.**

L'*altezza* di un prisma è la *distanza* delle due basi.

In un *prisma retto* l'*altezza* è data da *uno degli spigoli*.

---

(1) Propriamente la *base* del prisma è quella su cui il prisma appoggia.

135. Un prisma retto avente per base un *poligono regolare* si dice *prisma retto a base regolare*, o brevemente *prisma regolare*.

Parallelepipedo.

136. Un prisma si dice **parallelepipedo** (fig. 94) se la *base* è un **parallelogramma**. Nel parallelepipedo le sei facce sono parallelogrammi, *a due a due uguali;* si può quindi prendere per base una faccia qualunque.

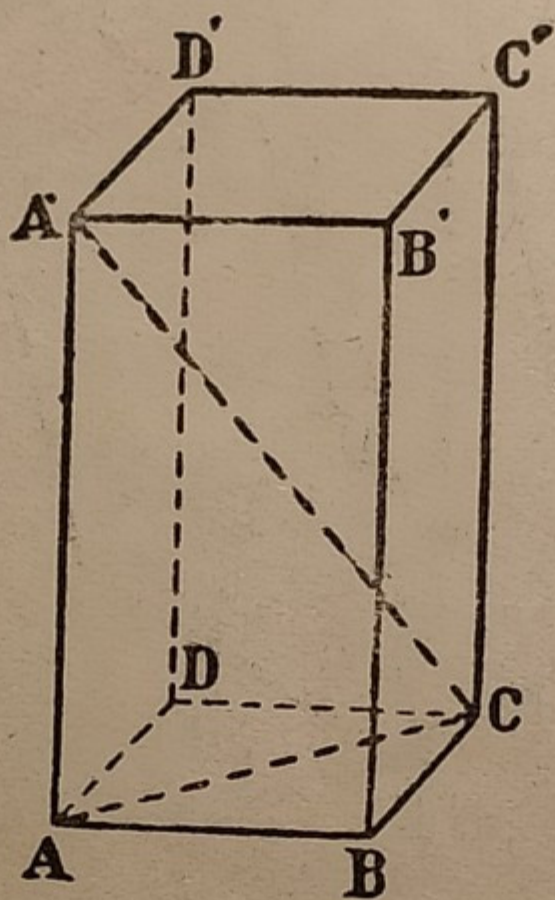



Fig. 94

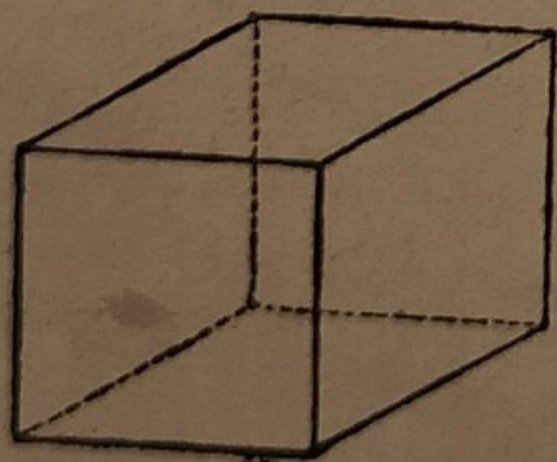
Il parallelepipedo può essere, come il prisma, *retto* od *obliquo*.

137. Se il *parallelepipedo retto* ha per base un *rettangolo* si dice *parallelepipedo rettangolo*, le cui facce sono rettangoli.

In un parallelepipedo si hanno *quattro diagonali*.

Nel parallelepipedo rettangolo le diagonali sono uguali.

Fig. 95

Le *dimensioni* di un parallelepipedo rettangolo sono i *tre spigoli* che concorrono in uno stesso vertice.

138. Un parallelepipedo rettangolo si dice *cubo* se ha le *tre dimensioni uguali*.

Un cubo ha per facce sei quadrati uguali.

Sviluppo del prisma retto, Area della superficie laterale e totale.

139. *Lo sviluppo di un prisma retto è costituito da un rettangolo avente per base il perimetro della base del prisma e per altezza lo spigolo del prisma, e da due poligoni uguali alle basi aventi un lato in comune colle due basi del rettangolo* (fig. 96).

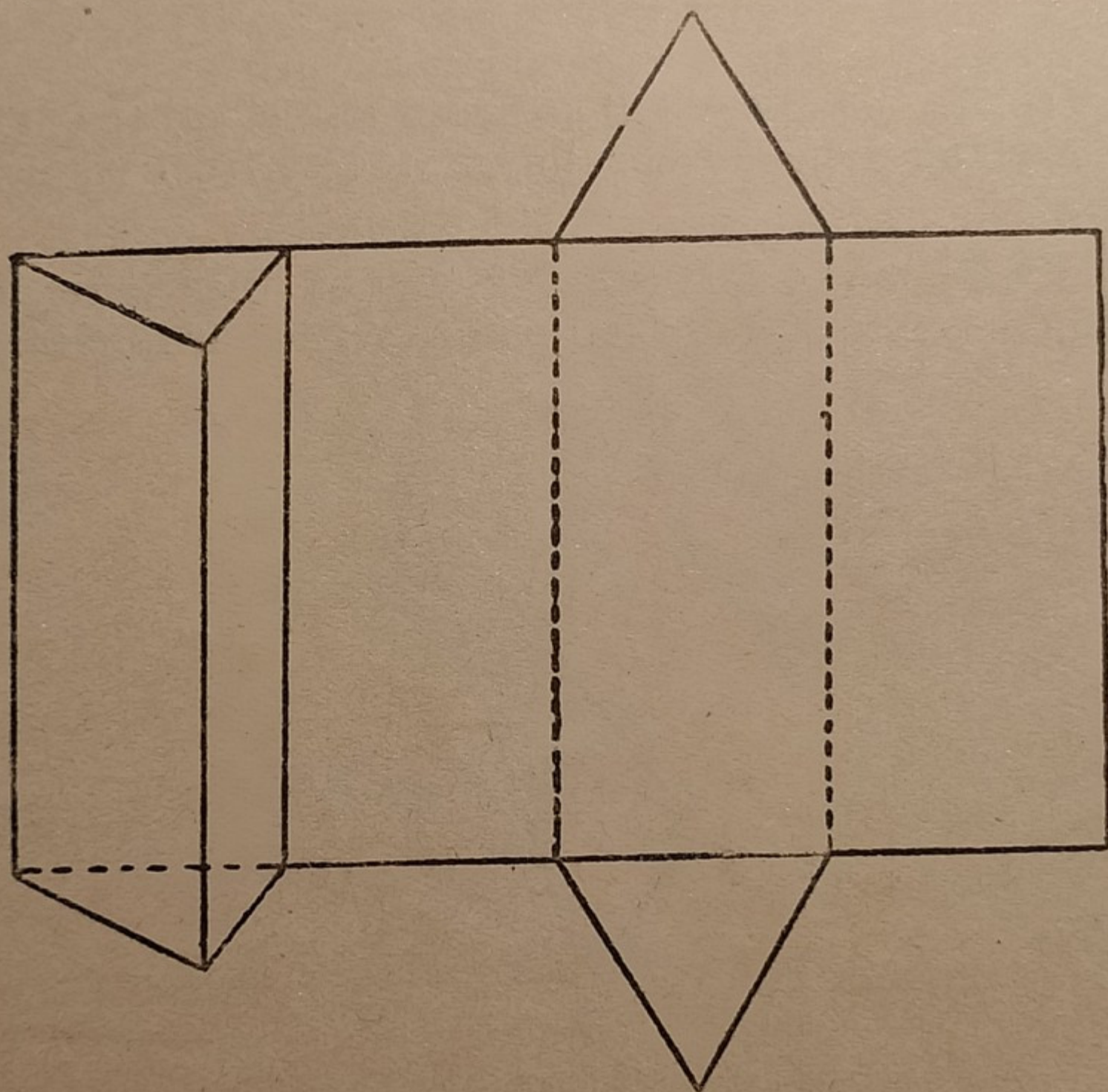



Fig. 96

140. Dallo sviluppo del prisma retto si deduce la

Regola. — **Per trovare l'area della superficie laterale del prisma retto si moltiplica il perimetro della base per l'altezza.**

Se indichiamo con p il perimetro della base e con h l'altezza del prisma, con S_1 l'area della superficie laterale si avrà:

$$S_1 = p \times h.$$

L'area della superficie totale del prisma retto si ottiene aggiungendo all'area laterale quella delle due basi.

Se con S_t indichiamo l'area della superficie totale e con B l'area della base, si ha:

$$S_t = p \times h + 2B.$$

Piramide.

141. La piramide è il poliedro che si ottiene, unendo i vertici di un poligono con un punto fuori del piano del poligono.

Il poligono $ABCDE$ (fig. 97) si dice **base** della piramide, il punto V, fuori dal piano, **vertice** della piramide, la

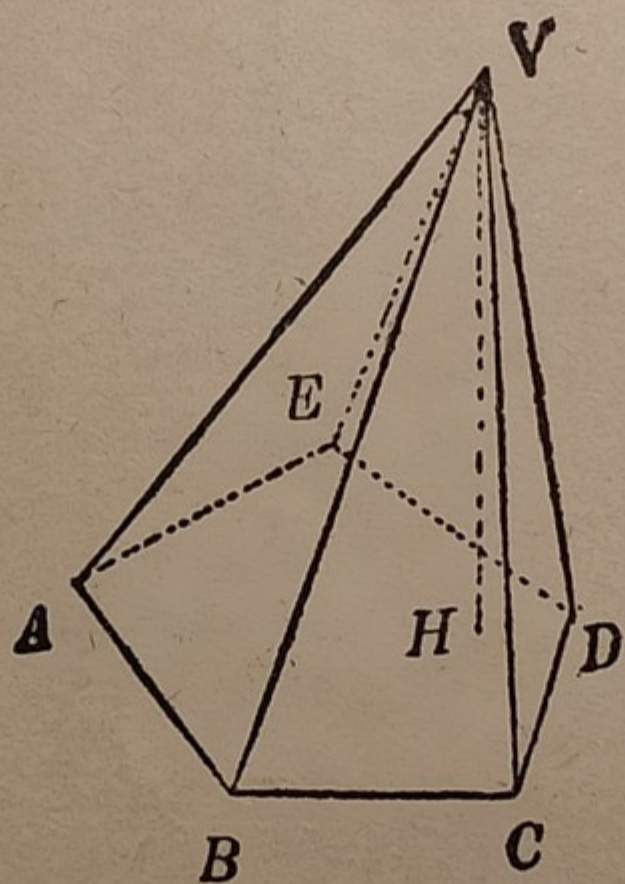



Fig. 97

distanza VH, del vertice dalla base, si dice **altezza**. I triangoli AVB, BVC, ... si dicono **facce laterali**, la cui *somma* si dice **superficie laterale**.

Se alla superficie laterale si aggiunge quella della base si ha la **superficie totale** della piramide.

Gli spigoli VA, VB,... che uniscono il vertice della piramide coi vertici della base si dicono propriamente *spigoli della piramide;* quelli della base AB, BC,... si dicono *lati della base.*

142. Una piramide si dice *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagonale*,... secondo che la base è un *triangolo*, un *quadrilatero*, un *pentagono*, ecc.

La *piramide triangolare* si dice anche **tetraedro**, in cui si può prendere come base qualunque faccia.

143. *Una piramide si dice* **retta** *se ha per base un poligono in cui si può inscrivere un circolo, ed il* **piede** *dell'altezza coincide col* **centro** *di questo circolo.* (fig. 98).

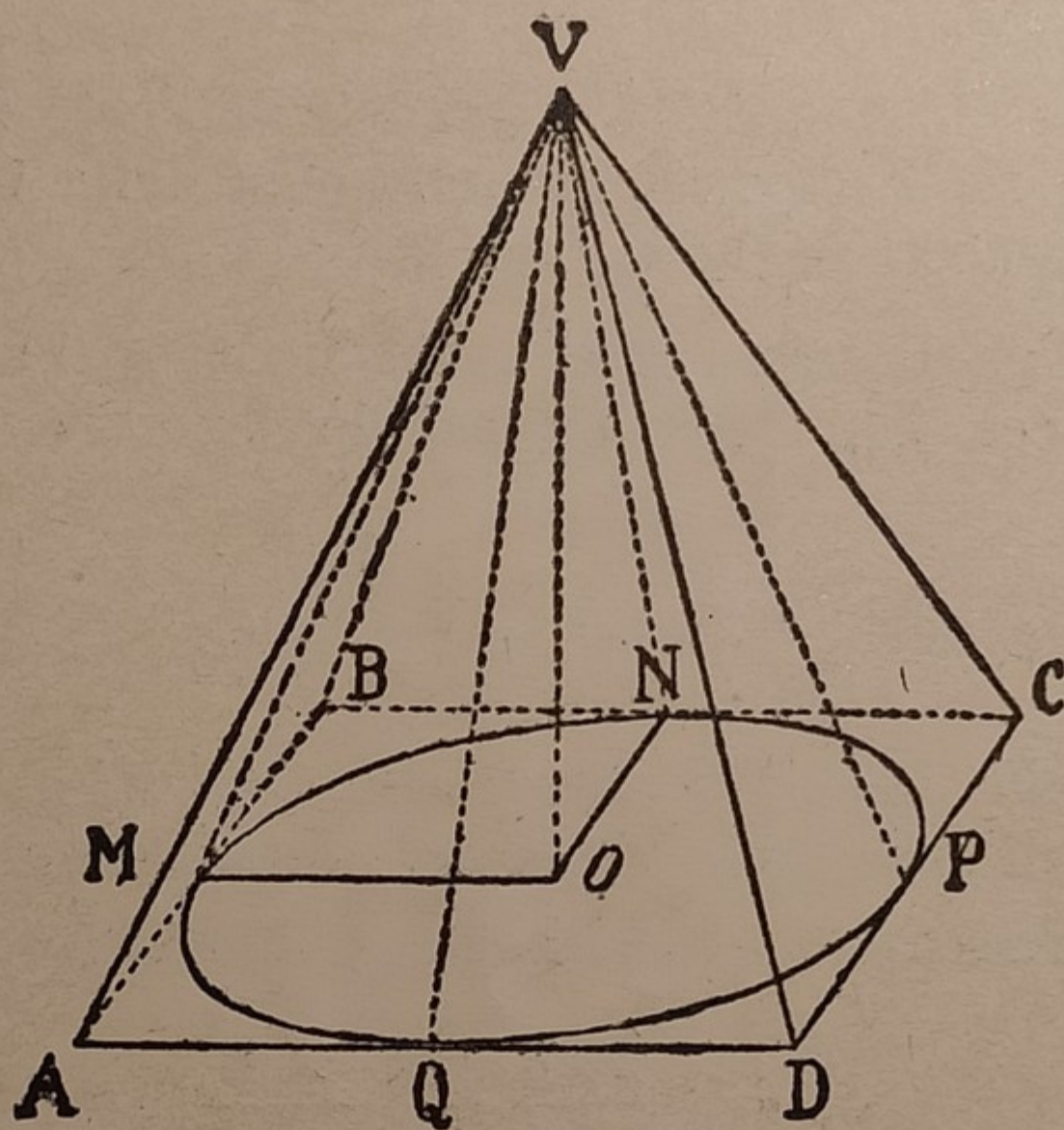



Fig. 98

In una piramide retta le altezze delle facce laterali sono aguali tra loro.

Una di queste altezze si dice **apotema** *della piramide retta.*

Nella piramide retta della fig. 98 l'apotema è VP.

144. Una piramide retta avente per base un *poligono regolare* si dice *piramide retta a base regolare*, o brevemente *piramide regolare*.

Area della superficie laterale e totale della piramide retta.

145. Per trovare l'area della superficie laterale di una piramide retta basta osservare che i triangoli laterali hanno altezze uguali (*apotema della piramide*).

Avremo quindi la

Regola. — **L'area della superficie laterale della piramide retta si trova moltiplicando il perimetro della base per l'apotema e dividendo il prodotto per 2.**

Se p indica il perimetro della base, a l'apotema della piramide, l'area S_l, della superficie laterale, è data dalla formula:

$$S_l = \frac{p \times a}{2}.$$

L'area della superficie totale della piramide retta si trova aggiungendo all'area della superficie laterale quella della base.

Se a' è l'apotema della base, si ha la formula:

$$S_t = \frac{p \times a}{2} + \frac{p \times a'}{2},$$

ossia:

$$S_t = \frac{p \times (a + a')}{2}.$$

Poliedri regolari.

146. Un poliedro si dice regolare se le facce sono poligoni regolari e i diedri sono uguali tra loro.

I poliedri regolari sono cinque:

Il *tetraedro*, l'*esaedro* o *cubo*, l'*ottaedro*, il *dodecaedro* e l'*icosaedro*.

147. Il *tetraedro regolare* ha 4 facce, che sono *triangoli equilateri*, 4 vertici e 6 spigoli.

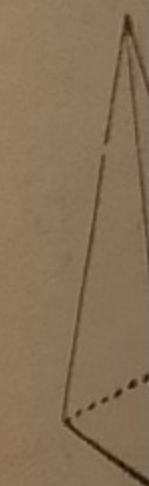
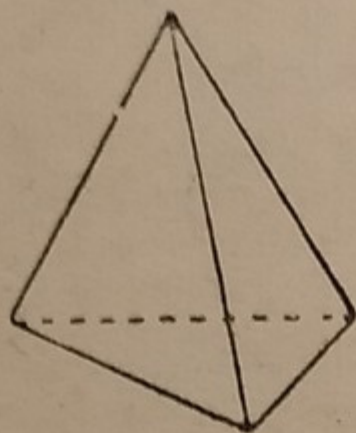



Fig. 99 — Tetraedro regolare

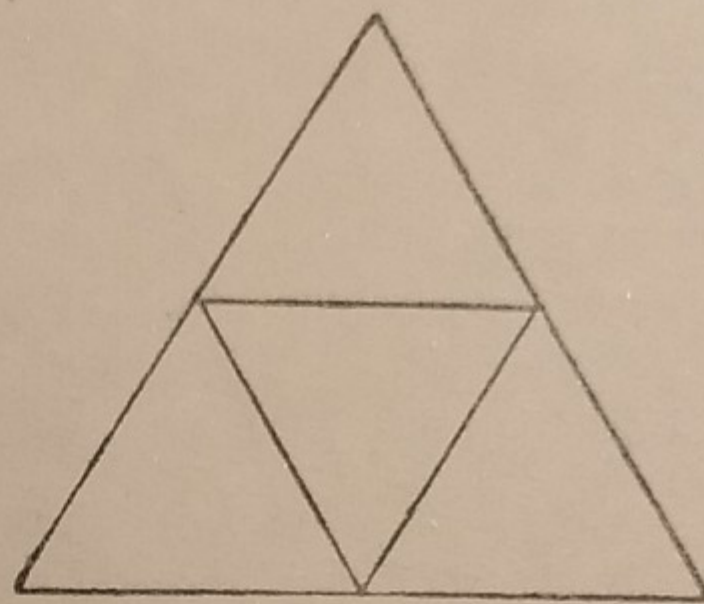
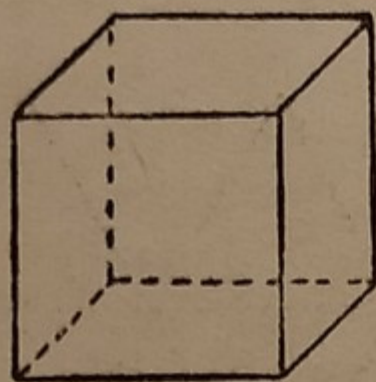
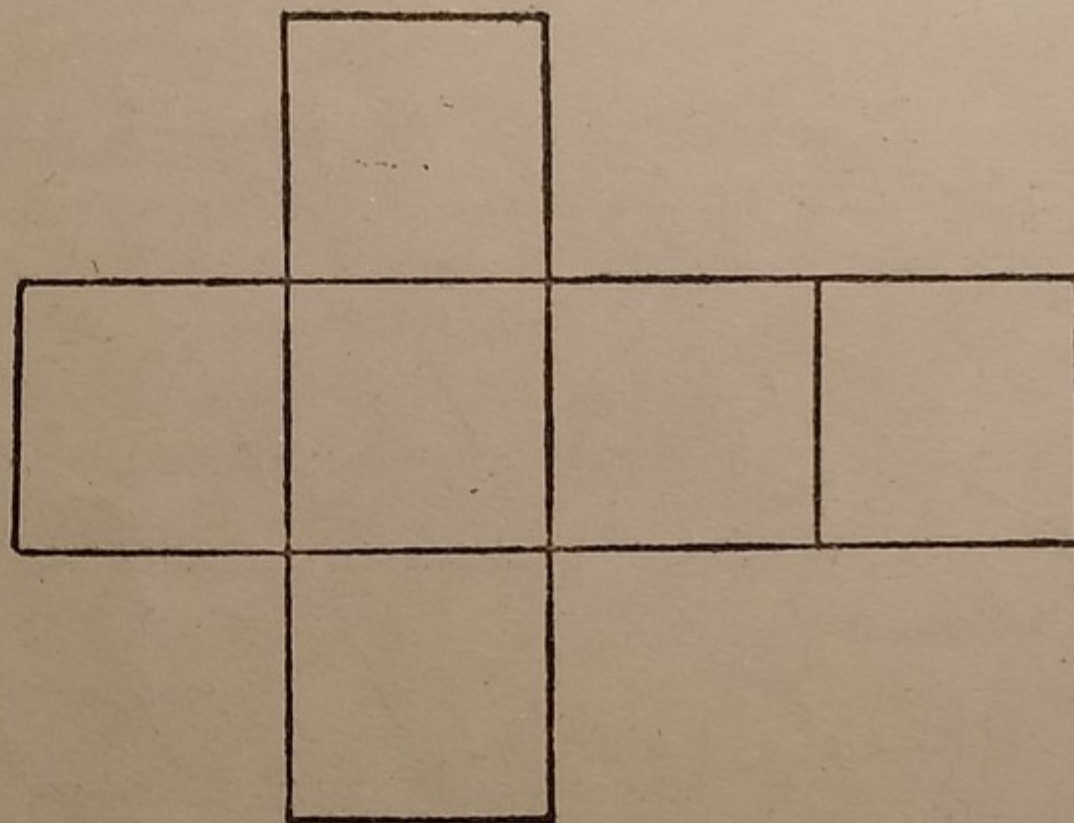
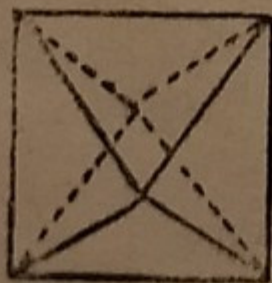
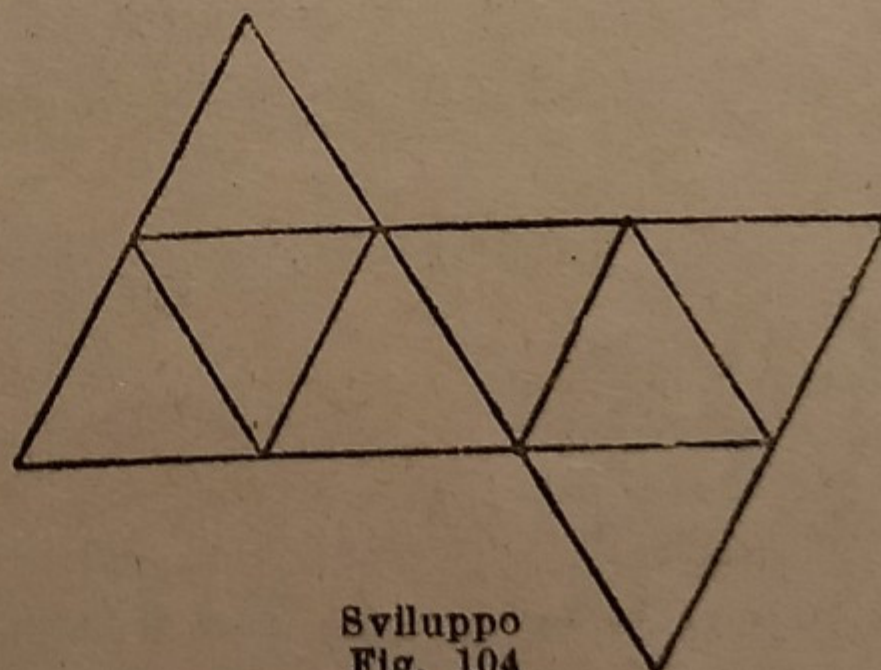
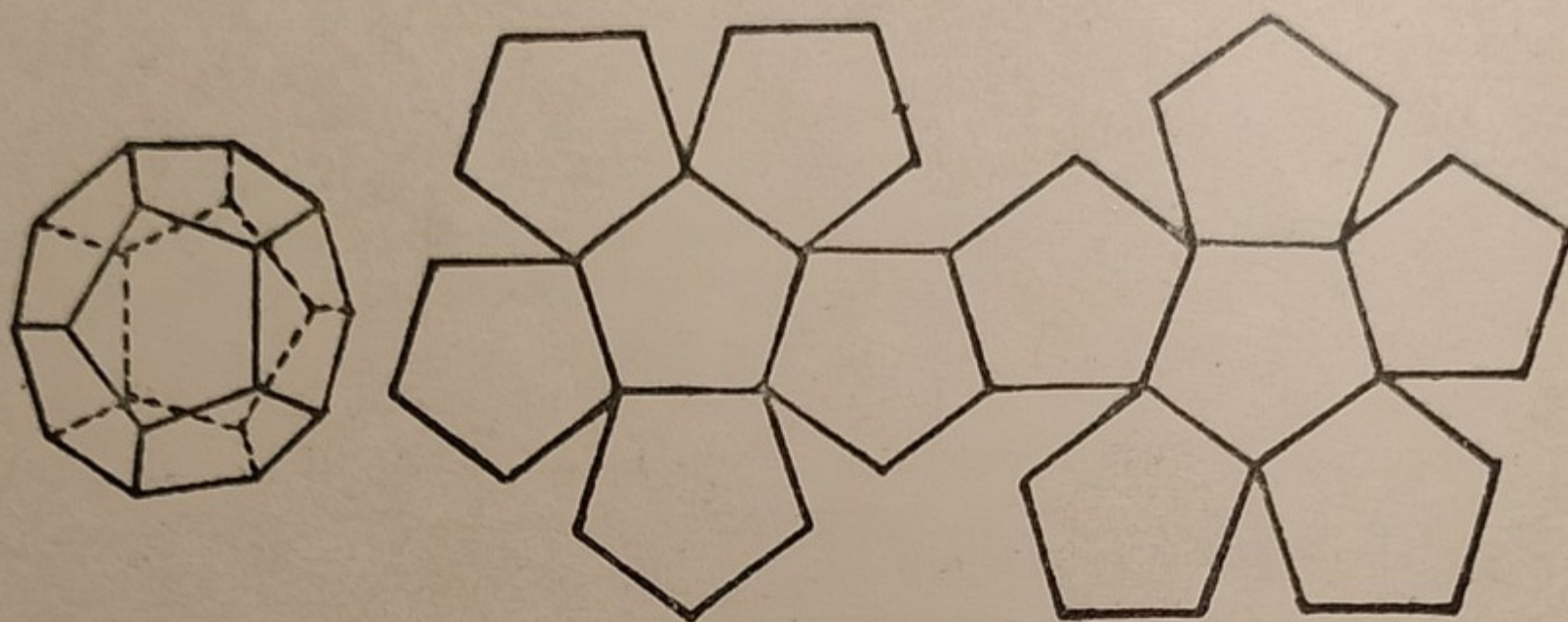



Fig. 100 — Sviluppo

L'*esaedro regolare*, o cubo, ha 6 facce, che sono *quadrati*, 8 vertici e 12 spigoli.

Esaedro regolare
Fig. 101

Sviluppo
Fig. 102

L' *ottaedro regolare* ha 8 facce, che sono *triangoli equilateri*, 6 vertici e 12 spigoli.

Ottaedro regolare
Fig. 103

Sviluppo
Fig. 104

Il *dodecaedro regolare* ha 12 facce, che sono *pentagoni regolari*, 20 vertici e 30 spigoli.

Dodecaedro regolare e sviluppo.
Fig. 105

L' *icosaedro regolare* ha 20 facce, che sono *triangoli equilateri*, 12 vertici e 30 spigoli.

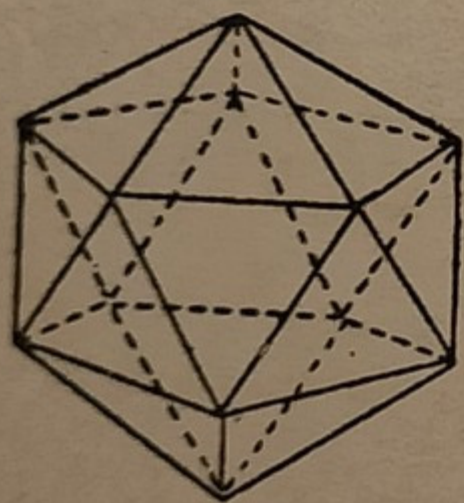



Fig. 106 — Icosaedro regolare.

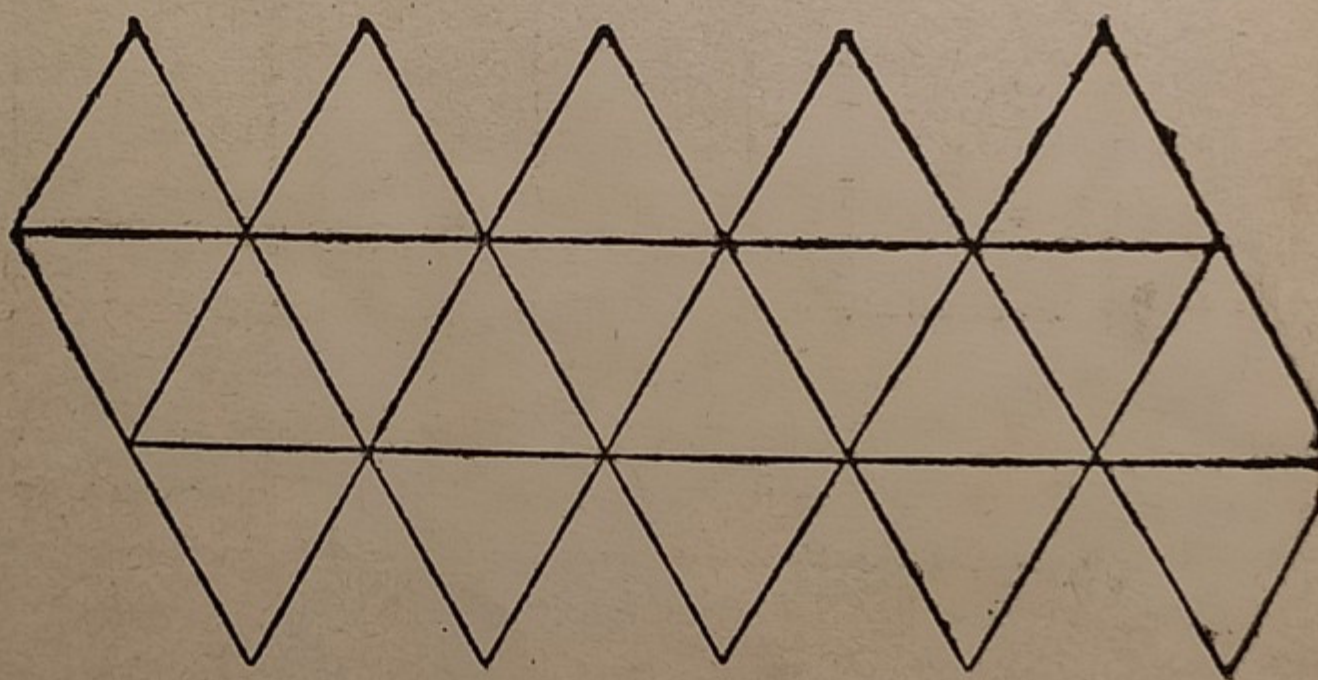



Fig. 107 — Sviluppo.

Disegnati gli sviluppi dei poliedri regolari, con movimenti opportuni delle facce, si costruiscono i poliedri (1).

(1) *Lo scolaro costruisca, come esercizio, i cinque poliedri regolari con cartoncino.*

ESERCIZI.

1. Un prisma triangolare regolare ha il lato di base di m. 1,20, l'altezza m. 2,50. Trovare l'area della superficie laterale.
2. I lati della base di un prisma quadrangolare retto sono m. 0,90, m. 1,30, dm. 8, dm. 7,5; l'altezza m. 1,80. Trovare l'area della superficie laterale.
3. Un prisma quadrangolare regolare ha il lato della base di m. 1,80, l'altezza è uguale ai $^3/_5$ del perimetro della base. Trovare l'area della superficie totale.
4. Il lato della base di un prisma triangolare regolare è m. 0,70; l'altezza m. 1.40. Trovare l'area della superficie laterale e totale.
5. I lati della base di un prisma triangolare retto sono dm. 8, dm. 9, dm. 12; l'altezza è uguale ai $^4/_5$ del perimetro della base. Trovare l'area della superficie laterale.
6. La somma del lato della base e dell'altezza di un prisma triangolare regolare è m. 13.50. L'altezza è doppia del lato della base. Trovare l'area della superficie laterale.
7. Le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo sono m. 4, m. 6, m. 8. Trovare l'area della superficie laterale e totale.
8. Le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo sono m. 3,5, m. 5,2, m. 7,4. Trovare l'area della superficie totale.
9. Lo spigolo di un cubo è m. 3,60. Trovare l'area delle facce.
10. L'area laterale di un prisma quadrangolare regolare è m. 14,58; l'altezza m. 2,7. Trovare il lato della base e l'area totale.
11. La somma delle dimensioni di un parallelepipedo rettangolo è m. 30, e si sa che sono proporzionali ai numeri 3, 4, 5. Trovare le dimensioni e l'area totale.
12. L'area delle facce di un cubo è m.^{2} 9,3750. Trovare lo spigolo.
13. La somma delle dimensioni di un parallelepipedo rettangolo è m. 87 e le dimensioni sono proporzionali ai numeri 4, 9, 17. Trovare le dimensioni e l'area totale.
14. La somma degli spigoli di un cubo è dm. 30. Trovare l'area delle facce.
15. L'area della superficie totale di un prisma quadrangolare regolare è m.^{2} 62.90, il lato della base m. 3,5. Trovare l'altezza.
16. Il lato della base di una piramide triangolare regolare è m. 1,20, l'apotema m. 3,50. Trovare l'area laterale.
17. Il lato della base di una piramide quadrangolare regolare è m. 1,40, l'apotema m. 2,50. Trovare l'area totale.
18. L'apotema di una piramide esagonale regolare è m. 5,80, il lato della base m. 1,80. Trovare l'area laterale e totale.
19. L'apotema di una piramide triangolare regolare è m. 4,50, il lato della base m. 1,40. Trovare l'area totale.
20. L'area della base di una piramide quadrangolare regolare è m.^{2} 14,44; l'apotema è m. 6,50. Trovare l'area laterale.

21. L'apotema di una piramide quadrangolare regolare è m. 12,50, l'area della base $m.^2$ 57,76. Calcolare l'area laterale.

22. La somma del lato della base e dell'apotema di una piramide pentagonale regolare è m. 6,40: l'apotema è tripla del lato della base. Trovare l'area laterale.

23. L'area della superficie laterale di una piramide quadrangolare regolare è $m.^2$ 16,20. Trovare l'apotema essendo il lato della base m. 1,8.

24. L'area della superficie totale di una piramide quadrangolare regolare è $m.^2$ 11,52; il lato della base è m. 1,6. Trovare l'apotema della piramide.

25. L'area laterale di una piramide quadrangolare regolare è $m.^2$ 12,96, l'apotema m. 1,80. Trovare l'area totale.

26. Il seguente prospetto contiene i numeri per cui bisogna moltiplicare il quadrato dello spigolo di ogni poliedro regolare per avere l'area delle facce.

POLIEDRI REGOLARI	Numeri per cui bisogna moltiplicare il quadrato dello spigolo per avere l'area delle facce
Tetraedro	1,732
Esaedro	6
Ottaedro	3,464
Dodecaedro	20,64
Icosaedro	8,660

27. Lo spigolo di un tetraedro regolare è m. 1,60. Trovare l'area delle facce.

28. L'area delle facce di un tetraedro regolare è $m.^2$ 10,8250. Trovare lo spigolo.

29. La somma degli spigoli di un cubo è m. 29,40. Trovare l'area delle facce.

30. L'area delle facce di un cubo è $m.^2$ 79,9350. Trovare lo spigolo.

31. Lo spigolo di un ottaedro regolare è m. 1,80. Trovare l'area delle facce.

32. L'area delle facce di un ottaedro regolare è $m.^2$ 62,5685. Trovare lo spigolo.

33. Lo spigolo di un dodecaedro regolare è m. 1,5. Trovare l'area delle facce

34. Lo spigolo di un icosaedro regolare è m. 3,20. Trovare l'area delle facce.

CAPITOLO XXI.

Misura dei poliedri.

148. *L'unità principale* per la misura dei poliedri è il *metro cubo* (**m.³**), cioè il cubo avente per spigolo l'*unità lineare*, il *metro*.

Sappiamo che i multipli del metro cubo sono il *decametro cubo* (**dam.³**), l'*ettometro cubo* (**hm.³**), ecc., ed i sottomultipli il *decimetro cubo* (**dm.³**), il *centimetro cubo* (**cm.³**) ed il *millimetro cubo* (**mm.³**). Queste unità *procedono di 1000 in 1000.*

149. *Osservazione.* — Quando il dm.³ si assume come unità di misura dei liquidi prende propriamente il nome di *litro* (**l.**). Nella pratica si usano i multipli del litro: il *decalitro* (**dal. = 10 l.**), l'*ettolitro* (**hl. = 100 l.**), ed i suoi sottomultipli: il *decilitro* (**dl. = 0,1 l.**) e il *centilitro* (**cl. = 0,01 l.**).

150. La *misura* di un poliedro si dice *volume* del poliedro ed indica quante volte il poliedro contiene l'*unità di misura*, o una sua parte *aliquota*.

Il volume di un poliedro non si ottiene direttamente, come la misura delle lunghezze, ma mediante operazioni aritmetiche eseguite sulle misure di alcune sue dimensioni.

Se due poliedri hanno *volumi uguali* si dicono *equivalenti*.

Volume del parallelepipedo.

151. Le misure delle tre dimensioni di un parallelepipedo rettangolo (fig. 108) siano cm. 3, cm. 2 e cm. 4.

Se dai punti di divisione delle dimensioni della base, cioè di *A B* e *A D*, si conducono i piani perpendicolari ad *A B* e *A D* si divide il parallelepipedo in 3 × 2 parti uguali, ciascuno dei quali è un parallelepipedo rettangolo, lungo e

largo cm. 1 e alto cm. 4. Se dai punti di divisione dell'altezza $A A'$ si conducono pure i piani perpendicolari ad $A A'$ si divide ciascuno dei 3×2 parallelepipedi ottenuti in 4 parti uguali, ciascuna delle quali è *1 cm.*^{3}. Allora il parallelepipedo dato conterrà:

$$3 \times 2 \times 4$$

centimetri cubi, ed il suo volume sarà:

$$\text{cm.}^3 (3 \times 2 \times 4) = \text{cm.}^3\, 24.$$

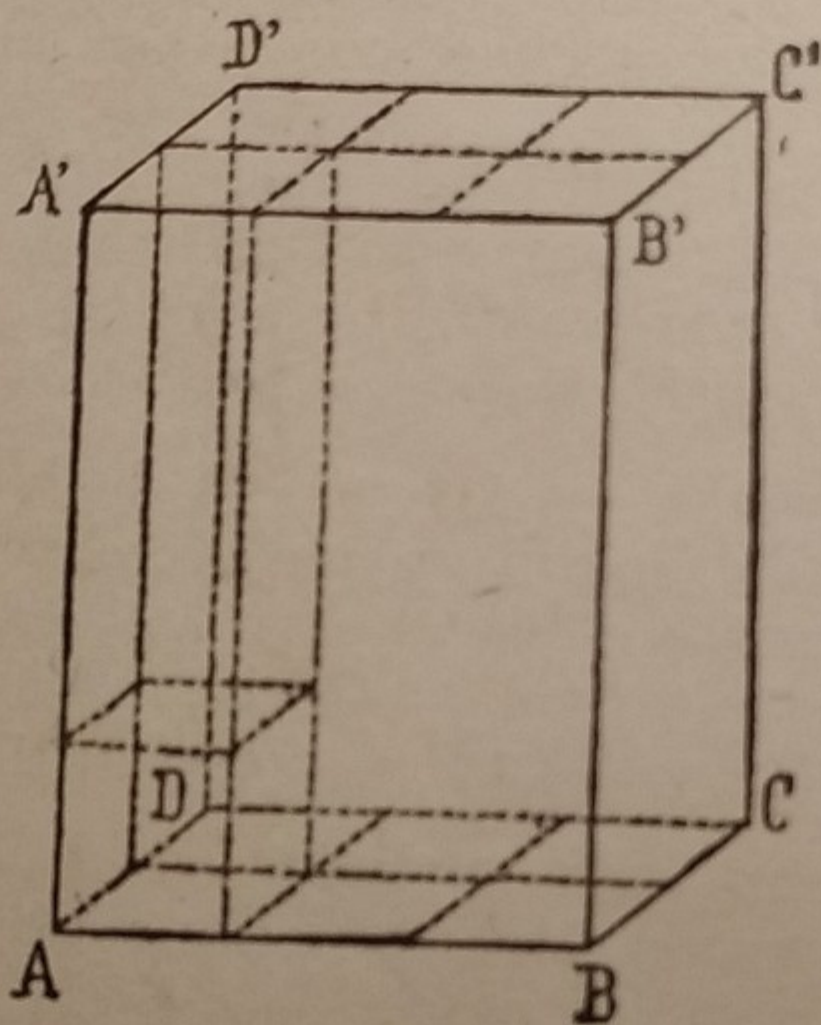



Fig. 108

Nella figura 108 sono disegnati solamente un parallelepipedo avente per base un quadrato, e un cubo unità.

Se le misure delle dimensioni sono decimali, cioè:

cm. 3,4, cm. 2,5, cm. 4,2,

basta considerarle sotto forma intera, cioè:

mm. 34, mm. 25, mm. 42.

Allora procedendo come nel primo caso si ottiene che il volume del parallelepipedo è

$$\text{mm.}^3 (34 \times 25 \times 42) = \text{mm.}^3\, 35700,$$

ossia:

$$\text{cm.}^3\, 35,700.$$

Questo identico risultato si ottiene moltiplicando le misure delle tre dimensioni espresse in centimetri.

152. Indicando con a, b, c, le misure delle dimensioni del parallelepipedo rettangolo (riferite alla medesima unità) e con V il volume, si ha la formula:

$$V = a \times b \times c.$$

Da cui la

Regola. — **Il volume del parallelepipedo rettangolo si trova facendo il prodotto delle misure delle tre dimensioni.**

153. Osserviamo che il prodotto delle due dimensioni a e b dà l'area della base; allora possiamo dire:

Il volume del parallelepipedo rettangolo si trova moltiplicando l'area della base per l'altezza.

154. *Volume del cubo.* Se le tre dimensioni del parallelepipedo rettangolo sono uguali abbiamo il cubo; allora:

Il volume del cubo si trova facendo la terza potenza (o il cubo) della misura dello spigolo.

Se l rappresenta la misura della spigolo del cubo si ha la formula:

$$V = l^3.$$

155. Un parallelepipedo retto od obliquo è equivalente (cioè ha lo stesso volume) ad un parallelepipedo rettangolo avente base equivalente ed uguale altezza.

Abbiamo quindi la regola generale:

Il volume di un parallelepipedo qualunque si trova moltiplicando l'area della base per l'altezza.

Volume del prisma.

156. Un prisma triangolare retto, od obliquo, è equivalente alla metà del parallelepipedo avente la base doppia e la medesima altezza.

Per cui:

Il volume del prisma triangolare si trova moltiplicando l'area della base per l'altezza.

157. Se il prisma è per es. pentagonale, basta immaginare i piani determinati da uno spigolo fisso e dagli altri due non consecutivi. Questi piani dividono il prisma pentagonale in *tre prismi triangolari* aventi la stessa altezza del prisma dato e per basi i triangoli la cui somma è uguale alla base del prisma. Il volume di questo prisma si troverà sommando i volumi dei tre prismi che lo compongono, o più brevemente, moltiplicando la somma delle loro basi per l'altezza comune. È quindi evidente la

Regola. — **Il volume di un prisma qualunque si trova moltiplicando l'area della base per l'altezza.**

Volume della piramide.

158. Consideriamo un prisma ed una piramide aventi la *medesima base e la medesima altezza*, rappresentati per es. da due scatole cave.

Se riempiamo la piramide di acqua e poi la versiamo consecutivamente per tre volte nel prisma, vediamo che questo si riempie esattamente. Possiamo allora asserire che il **volume della piramide è la terza parte di quello del prisma.**

Siccome questo si può verificare per qualunque piramide è evidente la

Regola. — **Il volume della piramide si trova moltiplicando l'area della base per l'altezza e dividendo il prodotto per 3.**

Se V, B ed h indicano rispettivamente il *volume, l'area della base* e l'*altezza* della piramide, si ha la formula:

$$V = \frac{B \times h}{3}.$$

Reciprocamente si ottiene:

$$B = \frac{3\,V}{h}, \quad h = \frac{3\,V}{B}.$$

ESERCIZI.

1. Le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo sono m. 1,20, m. 2,30, m. 3,40. Trovare il volume.
2. Le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo sono m. 0,80, dm. 7, cm. 45. Trovare il volume espresso in dm.^{3}.
3. Il volume di un parallelepipedo rettangolo, avente per base un quadrato il cui lato è m. 1,60, è m.^{3} 6,144. Trovare l'area laterale.
4. La somma delle dimensioni di un parallelepipedo rettangolo è m. 87. Trovare il volume sapendo che le dimensioni sono direttamente proporzionali ai numeri 4, 7, 9.
5. L'area della superficie laterale di un parallelepipedo rettangolo è m.^{2} 20,3280, l'altezza m. 2,64. Le dimensioni della base sono una i $^2/_3$ dell'altra. Trovare il volume del parallelepipedo.
6. La somma delle dimensioni di un parallelepipedo rettangolo è m. 38 e le dimensioni sono proporzionali ai numeri 2, 3, 5. Trovare le dimensioni e il volume del parallelepipedo.
7. Il perimetro della base di un parallelepipedo rettangolo è m. 5,60, l'altezza è m. 3,80. Sapendo che le dimensioni della base sono una i $^3/_4$ dell'altra trovare l'area totale e il volume.
8. Lo spigolo di un cubo è dm. 15,6. Trovare il volume espresso in m.^{3}
9. Lo spigolo di un cubo è m. 3,40. Trovare il volume espresso in cm.^{3}
10. L'area delle facce di un cubo è m.^{2} 40,56. Trovare il volume.
11. Un parallelepipedo retto ha per base un rombo le cui diagonali sono m. 3,60 e m. 2,40, l'altezza m. 3,50. Trovare il volume.
12. I lati della base di un parallelepipedo rettangolo sono m. 6 e m. 8; l'area laterale è m.^{2} 72,80. Trovare il volume.
13. Il volume di un parallelepipedo rettangolo è m.^{3} 5,070. La somma delle dimensioni della base è m. 3,90 e una è doppia dell'altra. Trovare l'area totale.
14. Il lato della base di un prisma triangolare regolare è m. 2,5, l'altezza m. 3,8. Trovare il volume.
15. Il volume di un prisma quadrangolare è m.^{3} 5,400, l'altezza m. 2,4. Trovare l'area totale.
16. Il lato della base di un prisma pentagonale regolare è m. 1,20, l'altezza m. 3,2. Trovare il volume.
17. Il lato della base di un prisma esagonale regolare è dm. 4,5, l'altezza m. 0,80. Trovare il volume.
18. La somma del lato della base e dell'altezza di un prisma triangolare regolare è m. 2,4, il loro rapporto è $^3/_5$. Trovare l'area totale e il volume.
19. Il lato della base di una piramide triangolare regolare è m. 1,80, l'altezza m. 4,5. Trovare il volume in dm.^{3}
20. Il lato della base di una piramide quadrangolare regolare è m. 2,80, l'altezza m. 4,80. Trovare il volume.
21. Il lato della base di una piramide esagonale regolare è m. 1,40, l'altezza è m. 4,20. Trovare il volume.
22. Il volume di una piramide quadrangolare regolare è m.^{3} 2,048, l'altezza m. 2,40. Trovare il lato della base.

CAPITOLO XXII.

Corpi rotondi.

Cilindro,

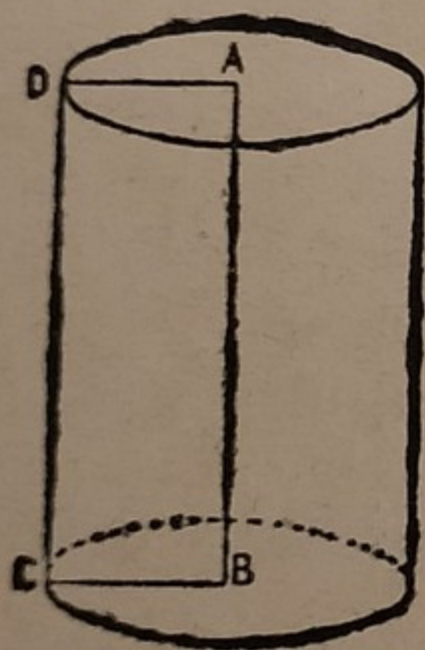
159. Immaginiamo che un rettangolo $A\,B\,C\,D$ ruoti, in una direzione qualunque, intorno al lato $A\,B$, supposto fisso, finchè il lato opposto $C\,D$ ritorni nella sua posizione primitiva. Il rettangolo, in questa sua rotazione genera un solido che si dice **cilindro circolare retto**, o semplicemente **cilindro** (fig. 109).

I due lati opposti $A\,D$ e $B\,C$ generano, nella rotazione, due circoli, situati su piani paralleli, che si dicono **basi** *del cilindro*, il lato $C\,D$, opposto al lato fisso, genera una superficie che si dice **superficie laterale** *del cilindro*. Se alla superficie laterale si aggiungono le due basi si ha la superficie **totale**. Il lato fisso $A\ B$ perpendicolare alle due basi, si dice **asse** del cilindro; la distanza fra le due basi si dice **altezza**. Per leggere un cilindro si legge il *rettangolo generatore*.

Fig. 109

La sezione di un cilindro con un piano passante per l'asse è un rettangolo, che si dice **sezione principale** del cilindro; essa ha per *base* il diametro della base e per *altezza*, l'altezza del cilindro.

In un cilindro si hanno infinite sezioni principali tutte uguali fra loro.

160. *Sviluppo del cilindro*. Lo sviluppo della superficie laterale di un cilindro in un piano è dato da un *rettangolo* avente la base uguale alla circonferenza della base del cilindro, e l'altezza uguale a quella del cilindro. Se allo sviluppo della superficie laterale si uniscono le due basi si ha lo sviluppo della superficie totale.

161. *Area laterale e totale del cilindro.* Dallo sviluppo del cilindro si deducono facilmente le due regole:

1.ª **L'area laterale del cilindro si trova moltiplicando la circonferenza della base per l'altezza.**

2.ª **L'area totale del cilindro si trova aggiungendo all'area laterale quella della due basi.**

Se r indica la misura del raggio della base, e h quella dell'altezza, l'area laterale S_l è data dalla formula:

$$S_l = 2 \pi r h,$$

quella totale S_t da:

$$S_t = 2 \pi r h + 2 \pi r^2.$$

162. Dalla formula:

$$S_l = 2 \pi r h,$$

si deduce:

$$r = \frac{S_l}{2 \pi h},$$

$$h = \frac{S_l}{2 \pi r}.$$

163. *Volume del cilindro.* — Consideriamo un cilindro e un prisma retto della medesima altezza, avente le basi inscritte nelle basi del cilindro. Il volume del prisma sarà minore di quello del cilindro; ma se noi immaginiamo la base del prisma con un numero abbastanza grande di lati concepiamo facilmente che la differenza tra il volume del cilindro e quello del prisma risulta tanto piccola da potersi praticamente trascurare.

Da quanto si è detto sul volume del prisma risulta evidente la

Regola. — **Il volume del cilindro si trova moltiplicando l'area della base per l'altezza.**

Se V indica il volume del cilindro si ha la formula:

$$V = \pi r^2 h,$$

da cui si deduce:

$$h = \frac{V}{\pi r^2},$$

$$r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$$

ESERCIZI.

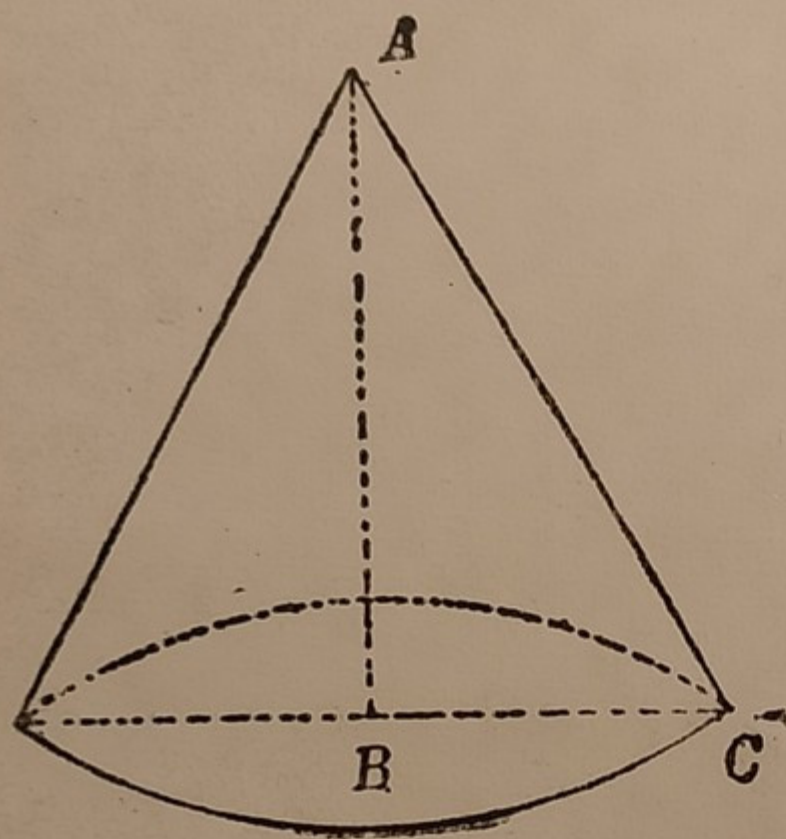
1. Il raggio della base di un cilindro retto è m. 1,6, l'altezza dm. 25. Trovare l'area laterale e il volume.
2. Il diametro della base di un cilindro retto è dm. 12,6, l'altezza cm. 75. Trovare l'area totale e il volume.
3. L'area laterale di un cilindro retto è m.^{2} 21,1950; il raggio della base m. 1,35. Trovare l'altezza e il volume.
4. L'area totale di un cilindro retto è m.^{2} 9,5456, il raggio della base m. 0,8. Trovare il volume.
5. Il volume di un cilindro retto è dm.^{3} 1,144530; il raggio della base dm. 0,45. Trovare l'area laterale.
6. Un prisma esagonale regolare cavo ha il lato della base interna di m. 0,80 e contiene acqua sino all'altezza di m. 1,20. Quest'acqua si versa in un cilindro retto il cui raggio della base è m. 0,60. Trovare a che altezza giunge l'acqua nel cilindro.
7. La somma del raggio della base e dell'altezza di un cilindro retto è m. 11,60; il loro rapporto è $^3/_5$. Trovare l'area totale e il volume.
8. L'area della base di un cilindro retto è m.^{2} 7,0650; la superficie laterale m.^{2} 30,1440. Trovare il volume.
9. Il raggio della base di un cilindro equilatero (1) è m. 1,50. Trovare l'area laterale, l'area totale e il volume.
10. La sezione principale di un cilindro retto è un quadrato la cui area è m.^{2} 6,1504. Trovare l'area laterale, l'area totale e il volume.
11. La sezione principale di un cilindro retto è un rettangolo il cui perimetro è m. 11,20 e la base è $^3/_4$ dell'altezza. Trovare l'area totale e, il volume.
12. Qual'è il raggio della base di quel cilindro che ha l'area laterale e il volume espressi dallo stesso numero?
13. Lo spigolo di un cubo è cm. 15. Si immerge in un cilindro il cui raggio di base è dm. 2,4 e che contiene acqua fino all'altezza di dm. 3. Trovare di quanto si innalza l'acqua nel cilindro.
14. Il raggio di base di un cilindro è dm. 4,6, l'altezza dm. 8,5. Vi si versa vino per i $^3/_5$ del suo volume del prezzo di L. 2,50 il litro e il rimanente si riempie con vino di L. 2,30 il litro. Trovare il prezzo di un litro del miscuglio.
15. Un cilindro retto, il cui raggio di base è dm. 3,4 e l'altezza dm. 5,6, è pieno di olio che viene venduto a L. 12,50 il kg. Trovare il ricavo sapendo che il peso specifico dell'olio è 0,920.
16. L'altezza di un cilindro retto è doppia del diametro della base e la somma del diametro e dell'altezza è di dm. 4,8. Per l'argentatura esterna di questo cilindro si spende L. 0,85 al cm.^{2} Trovare la spesa.
17. Una persona possiede un tino a forma cilindrica che contiene vino fino ai $^3/_4$ dell'altezza. Il raggio della base del tino è m. 0,50, l'altezza m. 1,60. Vende questo vino a L. 270 l'hl. Col ricavo compera del consolidato 5% al corso 94,60. Trovare quanto consolidato ha comperato quella persona e la somma che le è rimasta.

(1) *Un cilindro retto si dice* equilatero *quando il diametro della base è uguale all'al-*

Cono.

164. Immaginiamo un triangolo rettangolo *A B C* che ruoti, in una direzione qualunque, intorno al cateto *A B*, supposto fisso, sino a compiere una rotazione completa (fig. 110).

Il triangolo rettangolo, in questa sua rotazione, genera un solido che si dice **cono circolare retto**, o semplicemente **cono.**

L'altro cateto *B C*, nella rotazione, genera un circolo che si dice **base** del cono, l'ipotenusa *A C* genera una superficie, che si dice **superficie laterale** *del cono;* se alla superficie laterale si aggiunge la base si ottiene la *superficie totale.*

Il vertice *A* del triangolo rettangolo *A B C* si dice *vertice* del cono, il cateto fisso *A B*, perpendicolare alla base, si dice **asse**; la *distanza* del vertice dalla base si dice **altezza.**

L'ipotenusa *A C*, in qualunque posizione, si dice *lato*, o *apotema* del cono.

Fig. 110

Per leggere un cono si legge il triangolo rettangolo generatore.

La sezione di un cono con un piano passante per l'asse è un *triangolo isoscele*, che si dice **sezione principale** del cono; essa ha per base il diametro della base e per altezza l'altezza del cono. In un cono si hanno infinite sezioni principali, tutte uguali tra loro.

165. *Sviluppo del cono.* — Lo sviluppo della superficie laterale del cono retto in un piano è un *settore circolare*, avente la base uguale alla circonferenza della base del cono e il raggio uguale all'apotema. Se allo sviluppo della superficie laterale si unisce la base si ha lo sviluppo della superficie totale.

166. *Area laterale e totale del cono.* — Dallo sviluppo del cono, ricordando come si ottiene l'area del settore circolare, si deducono facilmente le due regole:

1.ª L'area laterale del cono si trova moltiplicando la circonferenza della base per l'apotema e dividendo il prodotto per 2.

2.ª L'area totale del cono si trova aggiungendo all'area laterale quella della base.

Corrispondentemente si hanno le due formule:

$$S_l = \pi\, r\, a,$$

$$S_t = \pi\, r\, a + \pi\, r^2.$$

16º. Dalla prima formula si deduce:

$$r = \frac{S_l}{\pi\, a},$$

$$a = \frac{S_l}{\pi\, r}.$$

168. *Volume del cono.* — Con un ragionamento analogo a quello fatto per trovare il volume del cilindro, e ricordando come si ottiene il volume della piramide, si deduce facilmente la

Regola. — **Il volume del cono si trova moltiplicando l'area della base per la terza parte dell'altezza.**

Corrispondentemente si ha la formula:

$$V = \pi\, r^2 . \frac{h}{3},$$

da cui:

$$h = \frac{3\, V}{\pi\, r^2},$$

$$r = \sqrt{\frac{3\, V}{\pi\, h}}.$$

ESERCIZI.

1. Il raggio della base di un cono retto è m. 1,40, l'apotema m. 2,50. Trovare l'area laterale e totale.
2. La circonferenza della base di un cono retto è m. 4,71, l'apotema m. 1,80. Trovare l'area laterale e totale.
3. La circonferenza della base di un cono retto è dm. 9,42, l'altezza dm. 5,4. Trovare il volume.
4. Il raggio della base di un cono è dm. 11,4, l'altezza è uguale ai $^3/_5$ della circonferenza della base. Trovare il volume.
5. L'area della superficie laterale di un cono retto è m.^{2} 38,1510; l'apotema è m. 2,70. Trovare l'area totale.
6. La circonferenza della base di un cono retto è m. 10,048; l'apotema è $^9/_4$ del raggio della base. Trovare l'area laterale.
7. L'area della superficie totale di un cono retto è m.^{2} 18,0864, il raggio della base m. 12. Trovare l'apotema.
8. Il volume di un cono retto è dm.^{3} 1004,800, l'altezza m. 1,50. Trovare il raggio di base.
9. La somma del raggio della base e dell'apotema di un cono retto è dm. 87,5 e il loro rapporto è $^8/_{17}$. Trovare il raggio della base, l'apotema, e l'area laterale.
10. Lo sviluppo della superficie laterale di un cono retto è un settore circolare la cui ampiezza è 120° e l'arco base m. 6,28. Trovare l'apotema e l'area laterale.
11. Il volume di un cono retto è dm.^{3} 116,318160, il raggio della base dm. 4,2. Trovare l'altezza.
12. In un cilindro avente per raggio di base dm. 1,5 e contenente acqua sino all'altezza di dm. 3 si immerge un cono il cui raggio di base è cm. 3 e l'altezza cm. 6. Di quanto si innalzerà l'acqua nel cilindro?
13. Il raggio della base di un cono equilatero (1) è m. 1,40. Trovare l'area laterale e totale.
14. Trovare la formula che dà l'area laterale del cono equilatero dato il raggio.
15. L'area laterale di un cono equilatero è m.^{2} 45,7812. Trovare il raggio della base.

---

(1) *Un cono si dice* equilatero *quando il diametro della base è uguale all'apotema.*

Sfera.

169. La sfera è un solido generato da una rotazione intera di un semicircolo AMB intorno al proprio diametro AB (fig. 111).

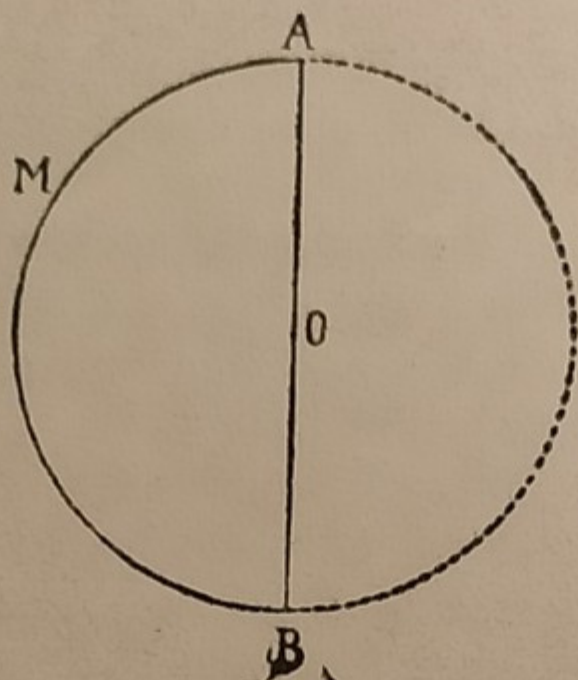



Fig. 111

La semicirconferenza AMB, nella rotazione, genera una superficie che si dice *superficie sferica*.

Il *centro O*, il *raggio OA* e il *diametro AB* del semicircolo generatore, si dicono rispettivamente *centro, raggio* e *diametro* della sfera e della superficie sferica.

In una sfera il centro è *unico; si hanno infiniti raggi uguali* e *infiniti diametri pure uguali; ogni diametro equivale a due raggi.*

Siccome tutti i punti della superficie sferica sono equidistanti dal centro, possiamo dire:

La sfera è un solido limitato da una superficie i cui punti sono tutti equidistanti da un punto detto centro.

170. La superficie sferica divide lo spazio in due regioni; una limitata (*sfera*) e l'altra illimitata. I punti della regione limitata si dicono *interni*, quelli della regione illimitata *esterni;* i punti della superficie sferica li diremo *punti sferici.*

I punti dello spazio, rispetto ad una sfera, saranno *interni, sferici* o *esterni* secondo che la loro distanza dal centro è *minore, uguale* o *maggiore* del raggio.

171. Una retta può avere dal centro di una sfera una distanza *minore, uguale* o *maggiore* del raggio.

Se una retta ha dal centro di una sfera una distanza minore del raggio interseca la sfera in due punti, se ha dal centro una distanza uguale al raggio

la tocca in un punto, se ha dal centro una distanza maggiore del raggio non ha nessun punto comune con essa.

Questa retta si dice rispettivamente *segante, tangente,* od *esterna* alla sfera.

Analogamente un piano sarà *segante, tangente* o *esterno,* rispetto ad una sfera, secondo che la sua distanza dal centro è *minore, uguale* o *maggiore* del raggio.

L'intersezione di una sfera con un piano è un circolo.

Il punto che il piano tangente ad una sfera ha in comune colla sfera si dice punto di *contatto* o di *tangenza.*

172. Il diametro $A\,B$ attorno a cui ruota il semicircolo per generare la sfera si dice anche **asse** della sfera; i suoi estremi A e B si dicono **poli**.

173. La *sezione* della superficie di una sfera con un piano passante per il *centro* si dice *circonferenza massima.*

La *sezione* della superficie di una sfera con un piano *non passante* per il centro si dice *circonferenza minore.*

Le circonferenze massime hanno per raggio il raggio della sfera e sono uguali tra loro. Le circonferenze minori hanno il raggio *minore* del raggio della sfera.

174. Nella *geografia astronomica* si dicono PARALLELI le *circonferenze minori poste su piani perpendicolari all'asse.*

Il *parallelo* il cui piano passa per il centro della sfera si dice EQUATORE (fig. 112).

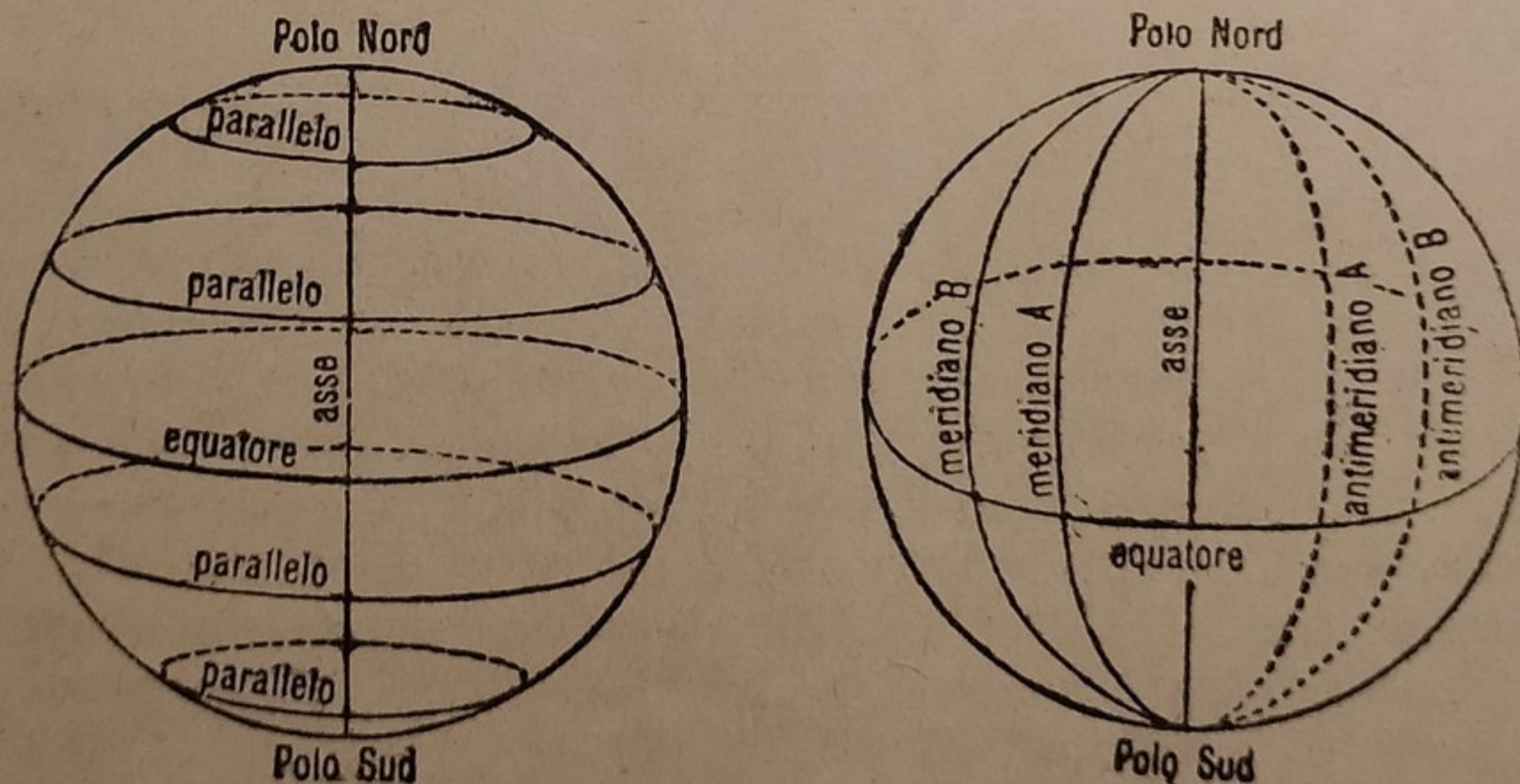



Fig. 112

I MERIDIANI sono *semicirconferenze massime* che hanno per estremi i poli.

La *semicirconferenza* che completa il *meridiano*, si dice ANTIMERIDIANO (fig. 112).

175. Una circonferenza minore divide la superficie sferica in due parti, ciascuna delle quali prende il nome di *calotta sferica* (fig. 113).

Fig. 113

Una *circonferenza massima* divide la superficie della sfera in due *parti uguali*, ciascuna delle quali prende il nome di *emisfero*.

Due circonferenze situate su piani paralleli dividono la superficie sferica in tre parti; quella intermedia si dice *zona sferica*. Le altre due parti sono *calotte* (fig. 113).

176. Due piani passanti per il centro della sfera dividono la superficie in quattro parti, ciascuna delle quali prende il nome di *fuso sferico*.

Il fuso sferico è la parte di superficie sferica compresa fra due semicirconferenze massime (fig. 112).

177. *Area della superficie della sfera.* La superficie sferica non è sviluppabile, come quella del cilindro e del cono; quindi la determinazione della sua misura è un po' più difficile. Sperimentalmente si determina che l'*area della superficie della sfera è uguale a quattro volte quella del suo circolo massimo.* Pesando infatti una sfera cava di ottone e quattro dischi, pure di ottone, dello stesso spessore della sfera, ed uguali ad un circolo massimo della sfera, si trovano pesi uguali. Si ha quindi la

Regola. — **L'area della superficie della sfera si trova moltiplicando per quattro quella di un suo circolo massimo.**

Se r indica il raggio della sfera si ha la formula:

$$S = 4 \pi r^2.$$

178. Da questa formula si deduce:

$$r^2 = \frac{S}{4\,\pi},$$

e quindi:

$$r = \sqrt{\frac{S}{4\,\pi}},$$

da cui:

Data l'area della superficie della sfera si trova il raggio dividendo l'area per 4 π ed estraendo dal quoziente la radice quadrata.

179. *Volume della sfera.* — Immaginiamo la superficie della sfera scomposta in infiniti piccoli elementi superficiali (triangoli, quadrilateri, ... curvilinei) tali da poterli considerare come figure piane; è evidente che le piramidi aventi per base questi elementi superficiali e per vertice il centro della sfera avranno l'altezza uguale al raggio della sfera. La somma di tutte queste piramidi sarà equivalente alla sfera; ma siccome hanno altezze uguali possiamo ritenere:

La sfera è equivalente (approssimativamente) ad una piramide avente la base uguale (approssimativamente) alla superficie della sfera e l'altezza uguale al raggio.

Ricordando come si trova il volume della piramide si deduce la

Regola. — **Il volume della sfera si trova moltiplicando l'area della superficie per la terza parte del raggio.**

Avremo quindi la formula:

$$V = 4\,\pi\,r^2\,\frac{r}{3},$$

ossia:

$$V = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3.$$

Siccome

$$\frac{4\,\pi}{3} = 4{,}19,$$

a meno di un centesimo per eccesso, possiamo, nella pratica, usare la formula:

$$V = r^3 \times 4{,}19.$$

ESERCIZI.

1. Il raggio di una sfera è m. 1,50. Trovare l'area e il volume.
2. La circonferenza massima di una sfera è m. 10,99. Trovare l'area e il volume.
3. L'area del circolo massimo di una sfera è $m.^2$ 8,0384. Trovare l'area e il volume della sfera.
4. L'area della superficie di una sfera è $dm.^2$ 24,6176. Trovare il raggio e il volume.
5. La circonferenza massima di una sfera è m. 22,608. Trovare il volume della sfera.
6. L'area del circolo massimo di una sfera è $m.^2$ 7,0650. Trovare l'area della superficie della sfera.
7. L'area della sezione principale di un cilindro equilatero è $dm.^2$ 605,16. Trovare il raggio della sfera avente un'area uguale all'area laterale del cilindro.
8. L'area della superficie di una sfera è $m.^2$ 113,04. Trovare il volume della sfera.
9. Il raggio di una sfera è dm. 4,8. Trovare il volume del cono avente per base un circolo massimo della sfera e per altezza il raggio.
10. Trovare il volume di una sfera la cui superficie è equivalente a quella di un cubo avente la somma degli spigoli uguale a dm. 240.
11. L'area della sfera inscritta in un cilindro equilatero è $dm.^2$ 18,0864. Trovare l'area totale del cilindro.
12. Il raggio di una sfera è dm. 1,2. Trovare quanto si spende per inargentarla in ragione di L. 0,65 il $cm.^2$.
13. Una sfera d'argento ha il raggio di cm. 4,5. Trovare il peso sapendo che il peso specifico dell'argento è 10,5.
14. Una sfera cava di nichel ha il raggio interno di cm. 6,5 e lo spessore di cm. 2. Trovare il peso sapendo che il peso specifico del nichel è 8,5.
15. I due raggi di una sfera cava di argento sono cm. 7,6 e cm. 5,2. Trovare il peso dell'argento.
16. Lo spigolo di un cubo è dm. 3,6. Trovare l'area della sfera inscritta.
17. Lo spigolo di un cubo è cm. 8,4. Trovare il volume della sfera inscritta.
18. Trovare il diametro di una sfera la cui superficie è equivalente alla superficie laterale di un cono retto avente per raggio di base dm. 4,2 e per apotema dm. 12.
19. Quant'acqua contiene una pentola avente la forma di una semisfera il cui orlo è di m. 1,57?

INDICE

Torino - Milano - Firenze — G. B. PARAVIA & C. — Roma - Napoli - Palermo

OPERE DELLO STESSO AUTORE PER LE SCUOLE SECONDARIE DI AVVIAMENTO PROFESSIONALE

Aritmetica e Geometria per la *prima classe* delle Scuole Secondarie di Avviamento Professionale, con numerosi esercizi e problemi seguiti dalle relative soluzioni - Quarta ed. L. 8 —

Aritmetica e Geometria per la *seconda classe* delle Scuole Secondarie di Avviamento Professionale, con numerosi esercizi e problemi seguiti dalle relative soluzioni - Terza ediz. 2a ristampa . . . . » 8 —

Problemi di Aritmetica e Geometria ed elementi di calcolo letterale per *tutti i tipi della terza classe* delle Scuole Secondarie di Avviamento Professionale - Terza ristampa 3a edizione . . . . » 8 —

Aritmetica e geometria per *tutti i tipi* della *prima* e *seconda* classe del Corso Secondario *biennale* di Avviamento Professionale con numerosi esercizi e problemi pratici scritti e orali . . » 12,50

Aritmetica e geometria con numerosi esercizi e problemi pratici orali e scritti per tutti i tipi del *Corso Secondario annuale* di Avviamento Professionale e per la *prima classe* del *Corso biennale a tipo alberghiero* . . . . » 8 —

Elementi di geometria ad uso delle Scuole Secondarie di Avviamento Professionale - Seconda edizione . . . . » 8 —

Applicazioni sulla misura delle grandezze ed elementi di calcolo letterale per la *terza classe agraria* delle Scuole Secondarie di Avviamento Professionale, con numerosi esercizi e problemi di carattere tecnico, seguiti dalle relative soluzioni . . . . » 9 —

Applicazioni ed elementi di calcolo letterale per la *terza classe industriale* delle Scuole di Avviamento Professionale, con numerosi esercizi e problemi di carattere tecnico, seguiti dalle relative soluzioni . . . . » 9 —

Applicazioni ed elementi di calcolo letterale per la *terza classe commerciale* delle Scuole Secondarie di Avviamento Professionale, con numerosi esercizi e problemi di carattere tecnico, seguiti dalle relative soluzioni . . . . » 9 —

Applicazioni aritmetiche e computisteria pratica per la *terza classe industriale femminile* delle Scuole Secondarie di Avviamento Professionale, con numerosi esercizi e problemi, seguiti dalle relative soluzioni . . . . . . » 9 —

(Vedi a pagina seguente della copertina per i volumi delle Scuole Medie dello stesso Autore).

Torino-Milano-Firenze — G. B. PARAVIA & C. — Roma-Napoli-Palermo

Altre opere del Prof. Dott. CONTARDO BAFFI

Prezzo: L. 6 — (in Torino) L. 5,75

Prezzo precedente L. 7 (in Torino) L. 6,50